Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H.-D. Alber
Dr. Sergiy Nesenenko

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

30.10.2008

Analysis II für M, HLM, Ph

2. Übung

Gruppenübung

G 4 Punktweise und Gleichmäßige Konvergenz

Untersuche $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ und $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz, wobei

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}, \quad x \in \mathbb{R}; \quad f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}, \quad x \in [-1,1].$$

G 5 Konvergenzradien

Bestimme den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$:

$$1. \ \sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2} x^n \qquad 2. \ \sum_{n=0}^{\infty} (an^2+1)x^n.$$

G 6 Potenzreihen und Differentiation

Gegeben sei die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{2n}} x^n.$$

(a) Ermitteln Sie den Konvergenzradius ρ und geben Sie für $x \in (-\rho, \rho)$ die Summe $f(x)$ der Potenzreihe an.

(b) Bestimmen Sie jeweils eine Potenzreihe für die Ableitungen $f'(x)$ und $f''(x)$, wobei $|x| < \rho$.

Hausübung

H 4 Potenzreihen und Differentiation (3 Punkte)

Bestimme den Konvergenzradius und für alle x im Konvergenzbereich den Wert der Potenzreihe

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^k.$$

H 5 Konvergenz von Potenzreihen (3 Punkte)

Bestimme für die folgenden Potenzreihen jeweils alle $x \in \mathbb{R}$, für die sie konvergieren: (Nicht die Randpunkte vergessen!)

$$\text{(a)} \ \sum_{n=1}^{\infty} n! x^n \qquad \text{(b)} \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}(x-2)^n \qquad \text{(c)} \ \sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^{3n}$$

Hinweis zu (c): Betrachte für die Randpunkte die Folge $\ln[(1-1/n)^{n^2} e^n]$

H 6 Gegenbeispiele zum Satz von Dini (3 Punkte)

Der Satz von Dini benötigt die drei folgenden Voraussetzungen:

- Das Intervall I ist kompakt.
- $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ für alle $x \in I$ (Monotonie in jedem Punkt x).
- Die Grenzfunktion ist stetig.

Finde jeweils eine Folge $(f_n) \subset C(I; \mathbb{R})$, die punktweise gegen eine Grenzfunktion f konvergiert und die jeweils eine der drei Voraussetzungen nicht erfüllt (aber beide anderen), und so dass die Konvergenz $f_n \xrightarrow{n \to \infty} f$ nicht gleichmäßig ist.