Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H.-D. Alber
Dr. Sergiy Nesenenko

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

23.10.2008

Analysis II für M, HLM, Ph

1. Übung

Gruppenübung

G 1 Punktweise und Gleichmäßige Konvergenz

Untersuchen Sie folgende Funktionenfolgen bzw. -reihen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz:

$$f_n(x) = \sqrt[n]{n^2x^3}, \quad x \in [0,5]; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{n^3+x^3}, \quad x \in [0,1]; \qquad g_n(x) = \sin\frac{x}{n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

G 2 Konvergenz von Funktionenreihen

Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ eine Folge nichtnegativer reeller Zahlen und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ konvergiere für ein $x = x_0 \in \mathbb{R}^+$.

Zeige: Die Reihe konvergiert gleichmäßig auf dem Intervall $[x_0, \infty[$.

G 3 Punktweise Konvergenz auf einem kompakten Intervall

Sei $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen $f_n\colon I \to \mathbb{R}$ auf einem kompakten (abgeschlossenen und beschränkten) Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, daß $\{f_n\}_n$ punktweise gegen eine stetige Grenzfunktion f konvergiert. Finde ein Gegenbeispiel zu der Aussage, dass dann $\{f_n\}_n$ auch gleichmäßig gegen f konvergiert.

Hausübung

H 1 Konvergenz von Funktionenreihen (3 Punkte)

Zeigen Sie, daß die folgende Funktionenreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} [x^n(1-x)] \quad , \; x \in \mathbb{R},$$

auf dem Intervall $[0,1]$ punktweise, aber nicht gleichmäßig konvergiert.

H 2 Punktweise und gleichmäßige Konvergenz (3 Punkte)

Bestimme für die Funktionenfolgen $\{f_n\}_{k\in\mathbb{N}}$ und $\{g_n\}_{k\in\mathbb{N}}$ jeweils den Grenzwert bezüglich punktweiser Konvergenz und entscheide, ob sie gleichmäßig konvergieren:

$$f_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \sqrt{x^2 + \frac{1}{k}}$$

$$g_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} x^j.$$

H 3 Gleichmäßige Konvergenz und gleichmäßige Stetigkeit (3 Punkte)

Sei $\{f_n\colon D \to \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Funktionenfolge, die gleichmäßig gegen $f\colon D \to \mathbb{R}$ konvergiert. Weiterhin, sei $f_n(D) \subseteq D'$ für alle $n \in \mathbb{R}$, und sei $g\colon D' \to \mathbb{R}$ eine gleichmäßig stetige Funktion (D' ist abgeschlossen). Zeige, daß $g \circ f_n$ gleichmäßig gegen $g \circ f$ konvergiert.