Lineare Algebra II
4. Tutoriumsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Jan H. Bruinier
Claudia Alfes
Markus Schwagenscheidt

Sommersemester 2013
12.06.2013

Gruppenübung

Aufgabe G1
Wir wollen uns überlegen, wie eine Jordanbasis für einen Endomorphismus ϕ aussehen muss. Sei

$$J = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

die Darstellungsmatrix in Jordanscher Normalform eines Endomorphismus ϕ bzgl. einer Basis $B = \{b_1, \ldots, b_5\}$, d.h. es gilt

$$M_B^B(\varphi) = J.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} &Jb_1 = 5b_1 \\ &Jb_2 = b_1 + 5b_2 &&\Leftrightarrow \quad b_1 = (J-5E)b_2 \\ &Jb_3 = 2b_3 \\ &Jb_4 = b_3 + 2b_4 &&\Leftrightarrow \quad b_3 = (J-2E)b_4 = (J-2E)^2 b_5 \\ &Jb_5 = b_4 + 2b_5 &&\Leftrightarrow \quad b_4 = (J-2E)b_5 \end{aligned}$$

Man sieht:

- Die Vektoren b_1 und b_4, die auf die ersten Spalten der Matrix führen, sind Eigenvektoren.
- Die Basisvektoren für einen Block hängen vom *letzten* Basisvektor des Blocks ab. Kennt man diesen (bzw. wählt ihn geeignet) so lassen sich die anderen Basisvektoren leicht berechnen.
- Hat ein Block Größe m, so muss der letzte Basisvektor v_m für diesen Block auf jeden Fall in $\mathrm{Eig}_m(\varphi, \lambda) \backslash \mathrm{Eig}_{m-1}(\varphi, \lambda)$ liegen, sonst wäre $(J-2E)^{m-1} v_m = 0$ und wir erhalten keine Basis.

Aufgabe G2 (Jordansche Normalform)
Sei A eine komplexe $n \times n$ Matrix. Wir geben einen Algorithmus zur Bestimmung der Jordanschen Normalform und der zugehörigen Jordanbasis an. Man bestimmt zuerst die Normalform, danach die Basis.

Bestimmung der Jordanschen Normalform

- Berechne das charakteristische Polynom

$$P_A(X) = (X - \lambda_1)^{m_1} \cdots (X - \lambda_k)^{m_k}.$$

- Lies die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ und die algebraische Vielfachheiten $m_1, \ldots, m_k$ ab.
- Für jeden Eigenwert λ tue folgendes:

– Berechne die Dimensionen der verallgemeinerten Eigenräume

$$\alpha_r = \dim(\mathrm{Eig}_r(A,\lambda)) = \dim(\ker((A-\lambda E)^r)) = n - \mathrm{Rang}((A-\lambda E)^r)$$

für $r = 0, 1, \ldots$, bis sie stationär werden.

– Die Anzahl β_r der Kästchen der Größe r ist

$$\beta_r = 2\alpha_r - \alpha_{r-1} - \alpha_{r+1}.$$

Die m_i geben die Größe des Blocks zu λ_i an. Die β_r geben die Anzahlen der Kästchen der Größe r an. Hat man die β_r für alle Eigenwerte bestimmt, so kann man die Jordansche Normalform aufstellen, indem man zu jedem Eigenwert λ und für alle r jeweils β_r Kästchen zu λ der Größe r in beliebiger Reihenfolge in eine Matrix schreibt.

Bestimmung der Jordanbasis

Für jeden Eigenwert λ tue folgendes: Arbeite folgendes Verfahren für jedes Jordankästchen zu λ ab. Beginne dabei mit dem größten Kästchen und arbeite dich in absteigender Reihenfolge zum kleinsten Kästchen vor.

- Angenommen, das Jordankästchen, dass wir gerade bearbeiten, hat Größe m.
- Wähle einen Vektor v_m aus

  $$\mathrm{Eig}_m(A,\lambda) \setminus \mathrm{Lin}(\mathrm{Eig}_{m-1}(A,\lambda) \cup S_m)$$

  wobei in S_m alle Vektoren der Stufe m sind, die wir schon in vorangegangenen Schritten in die Jordanbasis aufgenommen haben. Dabei sagen wir, ein Vektor v hat Stufe r, wenn $v \in \mathrm{Eig}_r(A,\lambda) \setminus \mathrm{Eig}_{r-1}(A,\lambda)$ ist.
- Setze

  $$\begin{aligned} v_{m-1} &= (A-\lambda E)v_m, \\ v_{m-2} &= (A-\lambda E)^2 v_m, \\ &\vdots \\ v_1 &= (A-\lambda E)^{m-1} v_m \end{aligned}$$

  und nehme $v_1, \ldots, v_m$ zur Basis hinzu.
- Mache mit dem nächst kleineren Block so weiter.

Wenn alle Blöcke abgearbeitet sind, haben wir die gesuchte Jordanbasis gefunden.

Aufgabe G3

Wir bestimmen die Jordansche Normalform und eine Jordanbasis für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Das charakteristische Polynom ergibt sich durch Entwickeln zu

$$P_A(X) = (X-1)^5.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} A - E &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ (A-E)^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ (A-E)^3 &= 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
a_0 &:= \dim(\mathrm{Eig}_0(A,1)) = \dim(\ker((A-E)^0)) = \dim(\ker(E)) = 0,\\
a_1 &:= \dim(\mathrm{Eig}_1(A,1)) = 2,\\
a_2 &:= \dim(\mathrm{Eig}_2(A,1)) = 4,\\
a_3 &:= \dim(\mathrm{Eig}_3(A,1)) = 5.
\end{aligned}$$

Die Anzahl der Jordan-Blöcke der Größe r berechnet sich nach der Formel

$$\beta_r = 2a_r - a_{r-1} - a_{r+1}.$$

Außerdem ist a_1 die geometrische Vielfachheit und gibt daher die Anzahl der Blöcke an.

Es gibt 2 Blöcke, da die geometrische Vielfachheit 2 ist. Die Anzahl der Blöcke der Größe r ist

$$\begin{aligned}
r = 1: &\quad 2a_1 - a_0 - a_2 = 2\cdot 2 - 4 = 0,\\
r = 2: &\quad 2a_2 - a_1 - a_3 = 2\cdot 4 - 2 - 5 = 1,\\
r = 3: &\quad 2a_3 - a_2 - a_4 = 2\cdot 5 - 4 - 5 = 1.
\end{aligned}$$

Der größte Block hat Größe 3, da der Hauptraum gleich dem dritten verallgemeinerten Eigenraum ist. Die Jordansche Normalform von A ist also gleich

$$A - E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zur Bestimmung der Jordanbasis $v_1, \ldots, v_5$ beginnen wir mit dem größten Block (der Größe 3). Wir wählen zuerst $v_3 \in \mathrm{Eig}_3(A,1) \setminus \mathrm{Eig}_2(A,1)$, z.B.

$$v_3 = (0,0,0,0,1)^T$$

und dann

$$\begin{aligned}
v_2 &= (A-E)v_3 = (0,1,1,0,0)^T,\\
v_1 &= (A-E)v_2 = (A-E)^2 v_3 = (0,-1,0,1,0)^T.
\end{aligned}$$

Nun zum nächst kleineren Block (also dem der Größe 2). Wir wählen

$$v_5 \in \mathrm{Eig}_2(A,\lambda) \setminus \mathrm{Lin}(\mathrm{Eig}_1(A,\lambda) \cup \{v_2\}),$$

z.B. geht hier der Vektor

$$v_5 = (1,0,0,0,0)^T.$$

Dann setzen wir noch

$$v_4 = (A-E)v_5 = (0,1,0,0,0)^T$$

und sind fertig.