Lineare Algebra II
2. Tutoriumsblatt

Fachbereich Mathematik
Prof. Jan H. Bruinier
Claudia Alfes
Markus Schwagenscheidt

Sommersemester 2013
16.04.2013

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Definitionen)
Wir erinnern an einige Definitionen: Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines euklidischen oder unitären Vektorraums $(V, \langle , \rangle)$ und A seine Darstellungsmatrix bzgl. einer ONB von V.

- f heißt selbstadjungiert, falls $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$ für alle $x, y \in V$ gilt.
- f heißt unitär (bzw. orthogonal im euklidischen Fall), falls $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ für alle $x, y \in V$ gilt.
- A heißt symmetrisch, wenn $A^T = A$.
- A heißt hermitesch, wenn $\overline{A}^T = A$.
- A heißt orthogonal, wenn $A^T A = AA^T = E$.
- A heißt unitär, wenn $A^* A = AA^* = E$, wobei $A^* = \overline{A}^T$.
- f ist selbstadjungiert gdw. A hermitesch (im unitären Fall) bzw. A symmetrisch (im euklidischen Fall).
- f ist unitär gdw. A unitär (unitärer Fall), f ist orthogonal gdw. A orthogonal (euklidischer Fall).

Aufgabe G2 (Orthogonale Matrizen)
Zeigen Sie, dass eine reelle $n \times n$ Matrix A genau dann orthogonal ist, wenn die Spalten (Zeilen) von A ein Orthonormalsystem von $\mathbb{R}^n$ (bzgl. Standardskalarprodukt) bilden.

Lösung: Es ist eine Äquivalenz zu zeigen, d.h. man hat zwei Richtungen zu beweisen:

- Es sei A orthogonal. Dann gilt $A^T A = AA^T = E_n$. Der (i, j)-te Eintrag von $A^T A$ ist nach der Formel für die Matrizenmultiplikation gegeben durch

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj} = \langle a_{(i)}, a_{(j)}\rangle$$

  wobei $a_{(i)}$ die i-te Spalte von A bezeichnet. Wegen $A^T A = E_n$ ist der (i, j)-te Eintrag von $A^T A$ andererseits auch gleich δ_{ij}. Es folgt

$$\langle a_{(i)}, a_{(j)}\rangle = \delta_{ij},$$

  d.h. die Spalten von A bilden ein Orthonormalsystem. Für die Zeilen argumentiert man analog mit $AA^T = E_n$.
- Nun seien die Spalten von A ein Orthonormalsystem, d.h.

$$\langle a_{(i)}, a_{(j)}\rangle = \delta_{ij}.$$

  Wie eben ist der (i, j)-te Eintrag von $A^T A$ gleich $\langle a_{(i)}, a_{(j)}\rangle$, also gilt $A^T A = E_n$. Somit ist A orthogonal.

Aufgabe G3 (Gram-Schmidt Orthogonalisierungsverfahren)
Seien $w_1, \dots, w_n \in V$ linear unabhängige Vektoren. Setze

$$v_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|}$$

und

$$\begin{aligned} v_k' &= w_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle v_j, w_k \rangle v_j, \\ v_k &= \frac{v_k'}{\|v_k\|}, \end{aligned}$$

für $k = 2, \dots, n$. Zeigen Sie, dass die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ ein Orthonormalsystem bilden.

Lösung: Wir zeigen die Behauptung per Induktion nach k, d.h. wir zeigen dass $v_1, \dots, v_k$ für jedes $1 \leq k \leq n$ ein Orthonormalsystem bilden, wobei v_j eine Linearkombination der w_i mit $i \leq j$ ist: Für $k = 1$ ist man sofort fertig. Sei $k > 1$ und $v_1, \dots, v_{k-1}$ ein Orthonormalsystem, d.h. $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ für alle $i \neq j$ und $\langle v_i, v_i \rangle = 1$, wobei jedes v_i eine Linearkombination der w_i mit $i \leq j$ ist. Zunächst ist v_k' (und damit auch v_k) eine Linearkombination der (linear unabhängigen) w_i mit $i \leq k$ und daher nicht 0.

Für $i \leq k - 1$ folgt:

$$\begin{aligned} \langle v_i, v_k \rangle &= \langle v_i, w_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle v_j, w_k \rangle v_j \rangle / \|v_k'\| \\ &= (\langle v_i, w_k \rangle - \sum_{j=1}^{k-1} \langle v_j, w_k \rangle \langle v_i, v_j \rangle) / \|v_k'\| \\ &\overset{IH}{=} \big(\langle v_i, w_k \rangle - \langle v_i, w_k \rangle \langle v_i, v_i \rangle \big) / \|v_k'\| = 0. \end{aligned}$$

Aufgabe G4 (Orthonormalbasen von Unterräumen)
Sei $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt versehen und sei $W \subset \mathbb{R}^4$ der von den Vektoren

$$w_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad w_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

aufgespannte Untervektorraum. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U.

Lösung: Wir wenden das Gram-Schmidtsche Ortogonalisierungsverfahren an. Der erste Vektor muss lediglich auf Einheitslänge normiert werden:

$$v_1 := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für den zweiten Vektor erhält man:

$$v_2' := w_2 - \langle v_1, w_2 \rangle v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie

$$v_2 := \frac{v_2'}{\|v_2'\|} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für den dritten Vektor erhält man:

$$v_3' := w_3 - \langle v_1, w_3\rangle v_1 - \langle v_2, w_3\rangle v_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 9/2 \\ -9/2 \end{pmatrix}.$$

und somit

$$v_3 := \frac{v_3'}{\|v_3'\|} = \frac{2}{\sqrt{1^2+1^2+9^2+9^2}}\, v_3' = \frac{1}{\sqrt{41}}\, v_3'.$$

Aufgabe G5 (Orthogonales Diagonalisieren)
Finden Sie eine *orthogonale* Matrix C, so dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

mittels $C^{-1}AC = C^tAC$ in Diagonalgestalt gebracht wird.

Lösung: Das charakteristische Polynom ergibt sich zu

$$\begin{aligned}(X-2)^3 - 1 - 1 - (X-2) - (X-2) - (X-2) &= X^3 - 6X^2 + 12X - 8 - 3X + 4 \\ &= X^3 - 6X^2 + 9X - 4 \\ &= (X-1)^2(X-4)\end{aligned}$$

Für den Eigenwert $\lambda = 4$ erhalten wir den Eigenraum: $\ker \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

Für den Eigenwert $\lambda = 1$ erhalten wir den Eigenraum: $\ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

Die Eigenwerte zu verschiedenen Eigenräumen stehen automatisch senkrecht aufeinander. Wir müssen noch Gram-Schmidt auf den Eigenraum zu $\lambda = 1$ anwenden:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Jetzt müssen wir die Orthogonalbasis noch normieren, um C zu erhalten:

$$C = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix},$$

Dann gilt $C^tAC = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.