Kapitel 4

Das Haar-Maß lokalkompakter Gruppen

In diesem Kapitel wenden wir uns den lokalkompakten Gruppen zu. **Von nun an werden alle betrachteten Gruppen das Hausdorff-Axiom erfüllen!** Zur Erinnerung: Ein topologischer Raum heißt lokalkompakt, wenn jeder Punkt eine kompakte Umgebung besitzt.

Wir schauen uns den Raum der stetigen beschränkten Funktionen $G \to \mathbb{R}$ an und suchen in dessen Dualraum ein linkstranslationsinvariantes, positives, nicht-degeneriertes Maß bzw. Integral μ.

Zunächst setzen wir etwas Notation fest. Sei G eine topologische Gruppe. Dann ist $C(G) := C(G, \mathbb{R}) := \{f : G \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig } \} \leq \mathbb{R}^G$ die Menge der stetigen Funktionen auf G. Wir identifizieren $C(G, \mathbb{R})$ als Untervektorraum des Raums $\mathbb{R}^G$ aller Funktionen. Wir verwenden $\mathbb{R}^{(G)}$ als Bezeichnung für den Raum der Funktionen mit endlichem Träger, $B(G) = B(G, \mathbb{R})$ ist der Raum der beschränkten, stetigen Funktionen und schließlich ist $C_c(G) = C_c(G, \mathbb{R})$ der Raum der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger (diese sind automatisch beschränkt, warum?).

Entsprechung bezeichnen wir mit $X^+(G)$ (für $X \in \{C, B, C_c\}$) die nicht-negativen Funktionen des jeweiligen Raumes $X(G)$.

Definition 4.1. Sei $\varphi \in \mathbb{R}^G$ eine reellwertige Abbildung und sei $g \in G$. Dann ist $\varphi_g(x) := \varphi(gx)$ das **Linkstranslat** von φ um g. □

Dies definiert übrigens eine Linkswirkung der Gruppe G auf dem Raum $\mathbb{R}^G$. Wir kommen nun zu dem Objekt, welches uns im Rest des Kapitels beschäftigen wird.

Definition 4.2. Sei G eine lokalkompakte Gruppe. Ein Maß μ heißt **Haar-Maß** auf G, falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(i) μ ist linksinvariant, d.h. $\mu(gA) = \mu(A)$ für alle Teilmengen $A \subseteq G$.

(ii) $\mu(K) < \infty$ für alle kompakten Mengen $K \subseteq G$.

(iii) μ ist innenregulär, d.h. für alle messbaren Mengen A gilt:

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) \mid A \subseteq U, U \text{ offen}\}$$ □

Alternativ kann man auch Außenregularität von μ fordern, d.h. für messbares A gilt $\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \subseteq U, K \text{ kompakt}\}$.

An dieser Stelle sei an die Veranstaltung Maß- und Integrationstheorie bezüglich der Kopplung von Maßen und Integralen erinnert. Hat man ein Maß μ gegeben, so erhält mittels der Integrationstheorie ein Integral $\int_G f(x) d\mu(x)$ auf dem Funktionenraum. Umgekehrt, gegeben ein Integral $\int_G \cdot d\lambda$, so erhält man ein Maß μ auf den Borelmengen von G via $\mu(A) := \int_G \chi_A(x) d\lambda(x) = \int_A 1 d\lambda(x)$, wobei χ_A die charakteristische Funktion einer messbaren Menge A ist. Es sei allerdings darauf hingewiesen, dass in dieser Aussage weit mehr Tiefgang steckt: Ist die Menge A nicht abgeschloffen, so ist χ_A nicht stetig. Ist weiter $\overline{A}$ nicht kompakt, dann hat χ_A natürlich auch keinen kompakten Träger.

Übersetzt man also Definition 4.2 in die Sprache der Integrale, dann sind wir auf der Suche nach einer linearen Funktion $\lambda : C_c(G) \to \mathbb{R}$, welches linksinvariant und positiv ist, d.h. für welches gilt:

(i) $\lambda(\varphi_g) = \lambda(\varphi)$ für alle $\varphi \in C_c(G)$ und alle $g \in G$.

(ii) Falls $\varphi \in C_c^+(G)$, so gilt $\lambda(\varphi) \geq 0$.

(iii) Es existiert ein $\varphi \in C_c^+(G)$ mit $\lambda(\varphi) > 0$.

Der Konsistenz halber werden wir vorerst uns der Sichtweise der Integrale anschließen.

4.1 Existenz des Haar-Integrals

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit der Konstruktion des Haar-Integrals (und damit auch eines Haar-Maßes wie oben beschrieben) auf der Menge der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger auf einer gegebenen lokalkompakten Gruppe. Wie wir sehen werden, ist diese Konstruktion *a priori* abhängig von der Wahl einer Funktion der Menge $C_c(G)$, wir werden aber zeigen, dass sie *a posteriori* unabhängig von dieser Wahl ist.

Auch sei darauf hingewiesen, dass wir hier den Satz von Tychonoff, also das Auswahlaxiom, benutzen werden. Es gibt jedoch eine Konstruktion des Haar-Integrals, welche nicht vom Auswahlaxiom abhängt.

Definition 4.3. Sei G eine Gruppe und seien $\varphi, \psi \in \mathbb{R}^G$. Wir bezeichnen mit $\mathbb{B}_\psi^\varphi$ die Menge aller Folgen $(b_k) \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, für die eine Folge $(a_k) \in G^{\mathbb{N}}$ existiert mit der Eigenschaft

$$\varphi \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} b_k \psi_{a_k}.$$

Man beachte, dass in der Folge b_k nur endlich viele Elemente ungleich 0 sind, während in der Folge a_k unendlich viele Elemente ungleich 0 zugelassen sind.

Weiter definieren wir für $\varphi, \psi \in \mathbb{R}^G$ den Ausdruck

$$(\varphi : \psi) := \inf\{\sum_{k \in \mathbb{N}} b_k \mid (b_k) \in \mathbb{B}_\psi^\varphi\}. \qquad \square$$

Beispiel 4.4. (i) $(\sin : \cos) = 1$.

(ii) $(\chi_{[0,2]} : \chi_{[0,1]}) = 2$.

(iii) $(e^x : \chi_{[0,1]}) = \infty$.

A priori verhält sich die Zahl $(\varphi : \psi)$ also beliebig wild. Man stelle sich beispielsweise die reelle Exponenzialfunktion gegenüber der charakteristischen Funktion des Einheitsintervall vor, die e-Funktion lässt nicht gegen endliche Vielfache und/oder Translate einer charakteristischen Funktion einer kompakten Menge abschätzen.

Allerdings werden wir gleich sehen, dass der Wert von $(\varphi : \psi)$ immer eine nicht-negative reelle Zahl ist, wenn φ und ψ positive stetige Funktionen mit kompaktem Träger sind (e^x hat natürlich keinen kompakten Träger). Unter Benutzung dessen wird sich herausstellen, dass für geeignetes η und geeignetes, fest gewähltes ψ die Funktion

$$\frac{(\cdot : \eta)}{(\psi : \eta)} : C_c(G) \to \mathbb{R}$$

ein Kandidat für ein Haar-Integral auf G ist.

Lemma 4.5. *Sei G lokalkompakt und seien $g, h \in G$, $\varphi, \psi \in C_c(G)$. Dann gilt $(\varphi : \psi) = (\varphi_g : \psi_h)$.*

Weiter gilt $(r\varphi : s\psi) = \frac{r}{s}(\varphi : \psi)$.

Beweis. Da $\mathbb{B}_{\psi}^{\varphi} = \mathbb{B}_{\psi_h}^{\varphi_g}$ gilt (warum?), folgt sofort

$$(\varphi : \psi) = \inf\{\sum_{k\in\mathbb{N}} b_k \mid (b_k) \in \mathbb{B}_{\psi}^{\varphi}\} = \inf\{\sum_{k\in\mathbb{N}} b_k \mid (b_k) \in \mathbb{B}_{\psi_h}^{\varphi_g}\} = (\varphi_g : \psi_h).$$

Die zweite Behauptung folgt aus der Äquivaleny der Ungleichungen $r\varphi \leq \sum b_k \psi_{a_k}$ und $\varphi \leq \sum \frac{r}{s} b_k s \psi_{a_k}$. □

Wie angekündigt, zeigen wir nun die Endlichkeit von $(\varphi : \psi)$.

Proposition 4.6. *Sei G topologische Gruppe und seien $\varphi, \psi \in C_c^+(G)$ mit $\psi \neq 0$. Dann gilt $0 \leq (\varphi : \psi) < \infty$.*

Beweis. Da φ und ψ jeweils positive Funktionen sind, sind die reellen Zahlen $s := \sup_{g\in G} \varphi(g)$ und $t := \sup_{g\in G} \psi(g)$ beide nicht-negativ. Da die Menge

$$V := \{g \in G \mid \psi(g) > \frac{s}{2}\}$$

nicht leer und offen in G ist, existieren Elemente $a_1, \ldots, a_n \in G$, so dass der kompakte Träger $\operatorname{supp}(\psi)$ von ψ in $\bigcup a_i^{-1} V$ enthalten ist. Für $g \in \operatorname{supp}(\varphi)$ finden wir ein k mit der Eigenschaft $\varphi(g) \leq t < \frac{2t}{s}\psi(a_k g)$. Also folgt die Ungleichung $\varphi \leq \sum \frac{2t}{s}\psi_{a_j}$. Demnach ist $\mathbb{B}_{\psi}^{\varphi}$ nicht leer und $(\varphi : \psi)$ endlich.

Sei $b_k \in \mathbb{B}_{\psi}^{\varphi}$. Dann gilt für jedes $g \in G$ die Ungleichung

$$\varphi(g) \leq \sum b_k \psi(a_k g) \leq \sum b_k s,$$

und es folgt $0 \leq \frac{t}{s} \leq (\varphi : \psi)$. □

Korollar 4.7. *Sei G topologische Gruppe und $\varphi, \psi \in C_c^+(G)$ mit $\psi \neq 0$. Mit $t := \sup_{g \in G} \varphi(g)$ und $s := \sup_{g \in G} \psi(g)$ gilt*

$$\frac{t}{s} \leq (\varphi : \psi).$$

Insbesondere gilt: $(0 : \psi) = 0$ und $(\psi : \psi) = 1$.

Die Abbildung $(\cdot : \cdot)$ hat aber noch weitere schöne Eigenschaften.

Lemma 4.8. *Sei G topologische Gruppe und seien $\varphi, \psi, \pi \in C_c(G)$.*

(i) Ist $\psi \neq 0$, so gilt $(\varphi + \pi : \psi) \leq (\varphi : \psi) + (\pi : \psi)$.

(ii) Sind $\psi, \pi \neq 0$, so gilt $(\varphi : \pi) \leq (\varphi : \psi)(\psi : \pi)$.

Beweis. Übung. □

Dies erlaubt uns nun weitere Konstruktionen auf dem Weg zum Haar-Integral.

Definition 4.9. Sei G topologische Gruppe und wähle $0 \neq \eta \in C_c^+(G)$. Für $\varphi, \psi \in C_c^+(G)$ mit $\psi \neq 0$ definiere $p(\varphi, \psi) := \frac{(\varphi:\psi)}{(\eta:\psi)}$ und weiter

$$\begin{aligned} p_\psi \colon C_c^+(G) &\to \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto p(\varphi, \psi) = \frac{(\varphi : \psi)}{(\eta : \psi)}. \end{aligned}$$ □

Wir fassen nun einige bereits gezeigte Resultate zusammen. Da p_ψ auf dem Raum $C_c^+(G)$ jeweils nicht-negativ ist und gleichzeitig nach Lemma 4.8 (ii) die Ungleichung $(\varphi : \psi) \leq (\varphi : \eta)(\eta : \psi)$ gilt, folgt die Abschätzung

$$0 \leq p(\varphi, \psi) \leq (\varphi : \eta).$$

Also können wir uns die Abbildung p_ψ als ein Element des Produkts $\prod_{\varphi \in C_c^+(G)} [0, (\varphi : \eta)]$ vorstellen. Letzteres Produkt ist kompakt nach dem Satz von Tychonoff (Achtung: Hier benutzen wir das Auswahlaxiom!), was wir im Folgenden wesentlich benutzen werden. Die Abbildungen p_ψ sind per Konstruktion invariant und homogen, aber nicht notwendigerweise additiv. Diesem Problem wenden wir uns nun zu.

Definition 4.10. Sei G eine topologische Gruppe und sei $U \in \mathfrak{U}(1)$ eine offene Umgebung der Eins. Definiere die Menge

$$P_V := \{0 \neq p_\psi \in C_c^+(G) \mid \operatorname{supp}(\psi) \subseteq V\},$$

d.h. P_V besteht aus den nichttrivialen stetigen Funktionen mit kompakten Träger, so dass ihr Träger in der Eins-Umgebung V enthalten ist. □

Lemma 4.11. *Sei G eine Hausdorffsche lokalkompakte topologische Gruppe. Dann ist der Schnitt*

$$\bigcap\{\overline{P_V} \mid V \in \mathfrak{U}(1)\}$$

nicht leer.

Beweis. Per Definition erhalten wir $\overline{P_{V\cap W}} \subseteq \overline{P_V} \cap \overline{P_W}$. Daher ist $\{P_V \mid V \in \mathfrak{U}(1)\}$ eine Filterbasis, welche per Konstruktion aus abgeschlossenen Mengen besteht. Da zusätzlich der umgebende Raum $\prod_{\varphi\in C_c^+(G)}[0,(\varphi:\eta)]$ kompakt ist, ist ihr Schnitt nicht leer (vgl. Vorlesung *Topologie*). □

Mit der folgenden Aussage nähern wir uns dem Haar-Integral an.

Lemma 4.12. *Sei $\lambda \in \overline{\{p_\psi \mid \psi \in C_c^+(G)\setminus\{0\}\}}$. Dann ist λ invariant, homogen und subadditiv, d.h. für jedes $g \in G$, alle $r \geq 0$ und alle $\varphi, \pi \in C_c^+(G)$ gilt*

$$\lambda(\varphi) = \lambda(\varphi_g), \quad \lambda(r\varphi) = r\lambda(\varphi), \quad \lambda(\varphi+\pi) \leq \lambda(\varphi) + \lambda(\pi).$$

Beweis. Für jedes $\varphi \in C_c^+(G)$ betrachten wir die Auswertungsabbildung $\mathrm{eval}_\varphi\colon \prod_{\varphi\in C_c^+(G)}[0,(\varphi:\eta)] \to \mathbb{R}$, welche λ auf $\lambda(\varphi)$ abbildet. Per Konstruktion ist eval_φ nichts Anderes als die Projektion aus die φ-Komponente, und daher stetig bezueglich der Produkttopologie auf $\prod_{\varphi\in C_c^+(G)}[0,(\varphi:\eta)]$. Wir erhalten also stetige Abbildungen

$$\alpha\colon \lambda \mapsto \lambda(\varphi) - \lambda(\varphi_g), \quad \beta\colon \lambda \mapsto \lambda(r\varphi) - r\lambda(\varphi), \quad \gamma\colon \lambda \mapsto \lambda(\varphi+\pi) - \lambda(\varphi) - \lambda(\pi).$$

Mit Hilfe von Lemma 4.5 folgt nun, dass $\alpha(\{p_\psi \mid \psi \in C_c^+(G)\setminus\{0\}\}) \subseteq \{0\}$ und $\beta(\{p_\psi \mid \psi \in C_c^+(G)\setminus\{0\}\}) \subseteq \{0\}$, woraus mit Hilfe der Stetigkeit von α und β folgt, dass diese Inklusion auch für den Abschluss gilt.

Die letzte Aussage folgt wieder aus der Stetigkeit von γ und der Inklusion $\gamma(\{p_\psi \mid \psi \in C_c^+(G)\setminus\{0\}\}) \subseteq (-\infty, 0]$ (vgl. Lemma 4.8 (i)) □

Lediglich die Addivität wird vermisst. Hier brauchen wir obige Aussage über den Schnitt der Mengen $\overline{P_V}$.

Proposition 4.13. *Sei $\lambda \in \bigcap\{\overline{P_V} \mid V \in \mathfrak{U}(1)\}$. Dann ist λ invariant, homogen, additiv und positiv definit.*

Beweis. Positive Definitheit folgt direkt aus Lemma 4.8 und Stetigkeit von p_ψ.

Nach Lemma 4.12 müssen wir noch zeigen, dass jedes $\lambda \in \bigcap\{\overline{P_V} \mid V \in \mathfrak{U}(1)\}$ additiv ist. Seien hierzu $\varphi, \pi \in C_c^+(G)$. Wähle eine stetige Funktion $\xi\colon G \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger, so dass $\xi(\mathrm{supp}(\varphi) \cup \mathrm{supp}(\pi)) = \{1\}$ (warum ist dies möglich?). Für gegebenes $r \geq 0$ betrachten wir nun die Funktion $\sigma := \sigma_r := \varphi + \pi + r\xi$. Da σ auf der kompakten Menge $\mathrm{supp}(\varphi) \cup \mathrm{supp}(\pi)$ nicht verschwindet, können wir φ und π normalisieren und erhalten stetige Funktionen $\hat{\varphi}$ und $\hat{\pi}$ via $\hat{\varphi}(g) := \frac{\varphi(g)}{\sigma(g)}$ und $\hat{\pi}(g) := \frac{\pi(g)}{\sigma(g)}$, welche außerhalb von $\mathrm{supp}(\varphi) \cup \mathrm{supp}(\pi)$ verschwinden. Weiter haben wir per Konstruktion $\hat{\varphi} + \hat{\pi} \leq 1$.

Sei nun $\varepsilon > 0$ und wähle eine Eins-Umgebung $V \in \mathfrak{U}(1)$, so dass $gh^{-1} \in V$ die Ungleichung $|\hat{\varphi}(g) - \hat{\varphi}(h)| < \varepsilon$ und $|\hat{\pi}(g) - \hat{\pi}(h)| < \varepsilon$ impliziert. Weiter wählen wir uns eine nichttriviale Funktion $\tau \in C_c^+(G)$ mit $\operatorname{supp}(\tau) \subseteq V$. Es existiert aber $b_k \in \mathbb{B}_\tau^\sigma$ mit $(\sigma : \tau) \leq \sum b_k \leq (\sigma : \tau)(1+\varepsilon)$. Mit einer Folge $a_k \in G^{\mathbb{N}}$, welche $\sigma \leq \sum b_k \tau_{a_k}$ erfüllt, folgt nun

$$\varphi(g) = \hat{\varphi}(g) \leq \sum \hat{\varphi}(g) b_k \tau_{a_k}(g) \leq \sum b_k(\hat{\varphi}(a_k) + \varepsilon)\tau_{a_k}(g),$$

wobei die zweite Ungleichung daraus folgt, dass entweder $a_k x$ außerhalb V (und damit $\operatorname{supp}(\tau)$) liegt, oder $\hat{\varphi}(g) \leq \hat{\varphi}(a_k) + \varepsilon$ gilt. Wir haben also gezeigt, dass

$$(\varphi : \tau) \leq \sum b_k(\hat{\varphi}(a_k) + \varepsilon)$$

gilt. Das gleiche Argument mit π in der Rolle von φ liefert weiter $(\pi : \tau) \leq \sum b_k(\hat{\pi}(a_k) + \varepsilon)$. Erinnern wir uns also an $\hat{\varphi} + \hat{\pi} \leq 1$ und summieren diese beiden Ungleichungen, so erhalten wir

$$(\varphi : \tau) + (\pi : \tau) \leq \sum b_k(1 + 2\varepsilon) \leq (\sigma : \tau)(1+\varepsilon)(1+2\varepsilon).$$

Dividieren wir dies durch $(\eta : \tau)$, so haben wir nun

$$p(\varphi, \tau) p(\pi, \tau) \leq p(\sigma, \tau)(1+\varepsilon)(1+2\varepsilon)$$

gezeigt, sind aber noch nicht fertig, da dies nicht a priori für beliebige ε gilt (wir haben V in Abhängigkeit von ε gewählt!). Aber: Der Träger $\operatorname{supp}(\tau)$ ist in V enthalten, was bedeutet, dass $p_\tau \in P_V$ enthalten ist. Nun liefert uns wieder die Stetigkeit obige Ungleichung für beliebige $\lambda \in \overline{P_V}$. Zusammengefasst: Falls $\lambda \in \bigcap\{\overline{P_V} \mid V \in \mathfrak{U}(1)\}$, dann gilt für alle $\varepsilon > 0$ die Ungleichung

$$\lambda(\varphi) + \lambda(\pi) \leq \lambda(\sigma)(1+\varepsilon)(1+2\varepsilon).$$

Es folgt

$$\lambda(\varphi) + \lambda(\pi) = \lambda(\sigma) = \lambda(\varphi + \pi + r\xi) \leq \lambda(\varphi + \pi) + r\lambda(\xi).$$

Da $r > 0$ beliebig war, folgt also $\lambda(\varphi) + \lambda(\pi) \leq \lambda(\varphi + \pi)$. □

Kombinieren wir nun Proposition 4.13 und Lemma 4.11, so erhalten wir unser Hauptresultat dieses Abschnitts.

Satz 4.14. *Sei G eine Hausdorffsche lokalkompakte Gruppe. Dann existiert ein Haar-Integral auf G.*

Anders formuliert, auf jeder Hausdorffschen lokalkompakten topologischen Gruppe existiert ein linkstranslationsinvariantes, reguläres und auf kompakten Mengen endliches Haar-Maß.

Beweis. Wähle ein $\lambda \in \bigcap\{\overline{P_V} \mid V \in \mathfrak{U}(1)\}$ (dies ist möglich nach Lemma 4.11). Dann erfüllt die lineare Erweiterung von λ auf den Vektorraum $C_c^+(G)$ alle gewünschten Eigenschaften. □

Es bleibt nun also noch die Frage offen, *wie viele* Haar-Integrale bzw. Haar-Maße es auf einer lokalkompakten Gruppe gibt. Dies wird nun Thema sein.

4.2 Eindeutigkeit des Haar-Integrals

Sei G lokalkompakte Gruppe und sei λ ein Haar-Integral auf G (Satz 4.14). Klar ist, dass wir für $r \geq 0$ mit der Funktion $r\lambda$ ebenfalls wieder ein Haar-Integral erhalten. Es stellt sich die Frage: Ist das die einzige Möglichkeit, wie zwei Haar-Integrale zusammenhängen können? Wie sich herausstellen wird, ist die Antwort *Ja*.

Wir nehmen weiterhin an, dass G Hausdorffsch und lokalkompakt ist.

Proposition 4.15. *Sei λ ein Haar-Integral auf G und seien $\varphi, \psi \in C_c^+(G)$. Ist $\psi \neq 0$, so gilt $\lambda(\varphi) \leq (\varphi : \psi)\lambda(\psi)$.*

Beweis. Sei $b_k \in \mathbb{B}_\psi^\varphi$. Unter Benutzung von Additivität, Positivität und Invarianz von λ folgt aus der Ungleichung $\varphi \leq \sum b_k \psi_{a_k}$ sofort die Ungleichung $\lambda(\varphi) \leq \sum b_k \lambda(\psi)$. □

Korollar 4.16. *Jedes Haar-Integral ist positiv definit. D.h. für $\varphi \neq 0$ folgt $\lambda(\varphi) > 0$.*

Beweis. Sei $\varphi \neq 0$ und wähle $\psi \in C_c^+(G)$ mit $\lambda(\psi) > 0$. Nach Proposition 4.15 folgt

$$0 < \lambda(\psi) \leq (\psi : \varphi)\lambda(\varphi).$$ □

Satz 4.17. *Sei G Hausdorffsche lokalkompakte Gruppe und wähle $0 \neq \eta \in C_c^+(G)$. Seien weiter λ, μ zwei Haar-Integrale auf G und sei schließlich $\varphi \in C_c(G)$. Dann gilt:*

$$\frac{\lambda(\varphi)}{\lambda(\eta)} = \frac{\mu(\varphi)}{\mu(\eta)}.$$

Also existiert eine reelle Zahl $r = r_{\lambda,\mu}$ mit der Eigenschaft $\lambda = r\mu$.

Beweis. Wir gehen in Schritten vor; zunächst wählen wir uns eine Funktion $\varphi \in C_c^+(G)$ und ein $\varepsilon > 0$. Da φ und η stetig sind, können wir uns eine Eins-Umgebung $U_\varepsilon \in \mathfrak{U}(1)$ wählen mit der Eigenschaften

$$|\varphi(x) = \varphi(y)| < \varepsilon, \qquad |\eta(x) = \eta(y)| < \varepsilon.$$

Wir werden nun φ und η gleichzeitig betrachten und schreiben $\theta \in \{\varphi, \eta\}$, falls die gemachte Aussage für beide Funktionen wahr ist.

Sei $V_\varepsilon := U_\varepsilon \cap U_\varepsilon^{-1}$, und wähle eine nicht-triviale Funktion $\psi \in C_c^+(G)$ mit $\operatorname{supp}(\psi) \subseteq V_\varepsilon$. Definiere weiter $\pi \in C_c^+(G)$ durch die Formel $\pi(x) := \psi(x) + \psi(x^{-1})$. Damit ist π eine nicht-triviale symmetrische Funktion, d.h. $\pi(x) = \pi(x^{-1})$.

Sei nun $\delta > 0$, und sei W eine offene Eins-Umgebung, deren Abschluss $\overline{W}$ kompakt ist und für die $x^{-1}y \in W$ die Ungleichung $|\pi(x) - \pi(y)| < \delta$ impliziert. Da die Menge $S := \operatorname{supp}(\varphi) \cup \operatorname{supp}(\eta)$ kompakt ist, wird sie durch endlich viele Translate $\bigcup_{k=1}^n a_k W$ von W überdeckt. Wir finden also (vgl. Übung) stetige Funktionen $\varphi_k \colon G \to [0,1]$ mit $\operatorname{supp}(\varphi_k) \subseteq a_k W$ und $\sum_k \varphi_k(S) = \{1\}$. Also gilt

$$\theta = \sum_{k=1}^n \theta\psi_k, \quad \mu(\theta) = \sum_{k=1}^n b_k, \tag{4.1}$$

mit $b_k := \mu(\theta\varphi_k) > 0$.

Wir behaupten nun, dass für alle $h \in G$ Folgendes gilt:

$$\mu(\pi)(\theta(h) - \varepsilon) \leq \mu(\theta\pi_h) = \sum_{k=1}^{n} \mu(\theta\psi_k\pi_h) \tag{4.2}$$

Falls $g^{-1}h \notin V_\varepsilon$, ist $\pi_{g^{-1}}(h) = 0$. Ist $g^{-1}h \in V_\varepsilon$, so gilt $\theta(h) \geq \theta(h) - \varepsilon$. Es folgt also $\theta\pi_h \geq (\theta(g) - \varepsilon)\pi_h$, und die Behauptung folgt, da μ eine positive lineare Form ist.

Wir zeigen nun

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(\theta\psi_k\pi_h) \leq \sum_{k=1}^{n} \mu(\theta\psi_k)(\pi_{a_k}(h) + \delta). \tag{4.3}$$

Ist $h \notin a_kW$, so ist $\psi_k(h) = 0$. Ist $h \in a_kW$, so gilt $(a_k^{-1}g)(g^{-1}h) \in W$, und damit $\pi_{g^{-1}}(h) \leq \pi_{a_k^{-1}}(g) + \delta$. Es folgt also $\psi_k\pi_h \leq \psi_k(\pi_{a_k^{-1}}(g) + \delta)$.

$$\text{Für } y \in G \text{ gilt } \theta(y^{-1}) - 2\varepsilon \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{b_k}{\mu(\pi)}\pi_y(a_k). \tag{4.4}$$

Wähle $\delta > 0$ klein genug, so dass $\sum \mu(\theta\varphi_k)\delta < \mu(\pi)\varepsilon$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\mu(\pi)(\theta(y^{-1}) - \varepsilon) &\overset{(4.2)}{\leq} \sum_{k=1}^{n} \mu(\theta\psi_k\pi_{y^{-1}}) \\
&\overset{(4.3)}{\leq} \sum_{k=1}^{n} \mu(\theta\psi_k)(pi_{h^{-1}}(a_k) + \delta) \\
&= \sum_{k=1}^{n} b_k\pi_{h^{-1}}(a_k) + \mu(\theta)\delta \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} b_k\pi_{h^{-1}}(a_k) + \mu(\pi)\varepsilon,
\end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt.

Wir definieren nun eine weitere Funktion $\theta^\varepsilon \in C_c^+(G)$, welche $g \in G$ auf $\max\{0, \theta(g) - 2\varepsilon\}$ abbildet. Wir erhalten die Ungleichung

$$(\theta^\varepsilon : \pi)\mu(\pi) \leq \mu(\theta) \leq (\theta : \pi)\mu(\pi). \tag{4.5}$$

In der Tat, wir wissen nach (4.4), dass die Folge $\frac{b_k}{\mu(\pi)}$ zur Menge $\mathbb{B}_\pi^{\theta^\varepsilon}$ gehört, und schließen $(\theta^\varepsilon : \pi) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{b_k}{\mu(\pi)}$. Mit (4.1) ergibt sich also die erste Ungleichung, die zweite folgt aus Proposition 4.15.

Wir wählen uns nun eine stetige Funktion $\xi\colon G \to [0,1]$ mit kompakten Träger, welche jedes Element von $\operatorname{supp}(\theta)$ auf 1 abbildet. Es folgt also $\theta \leq \theta^\varepsilon + 2\varepsilon\xi$. Wir berechnen also mit Hilfe von Lemma 4.8:

$$(\theta : \pi) \leq (\theta^\varepsilon + 2\varepsilon\xi : \pi) \leq (\theta^\varepsilon : \pi) + (2\varepsilon\xi : \pi) \leq (\theta^\varepsilon : \pi) + 2\varepsilon(\xi : \theta)(\theta : \pi).$$

Schließlich folgern wir hieraus

$$(1 - 2\varepsilon(\xi : \theta))(\theta : \pi)\mu(\pi) \leq \mu(\theta) \leq (\theta : \pi)\mu(\pi). \tag{4.6}$$

Mit anderen Worten, wir haben also gezeigt, dass für jedes $\gamma > 0$ eine stetige Funktion π existiert, so dass $(1-\gamma)(\theta : \pi) \leq \frac{\mu(theta)}{\mu(\pi)} \leq (\theta : \pi)$ gilt. Da $\theta \in \{\varphi, \eta\}$ folgt

$$(1-\gamma)\frac{(\varphi : \pi)}{(\eta : \pi)} \leq \frac{\mu(\varphi)}{\mu(\eta)}, \text{ und } \frac{\mu(\varphi)}{\mu(\pi)} \leq \frac{(\varphi : \pi)}{(1-\gamma)(\eta : \pi)}.$$

Diese Ungleichungen gelten aber für jedes Haar-Integral μ, und wir erhalten

$$\frac{\lambda(\varphi)}{\lambda(\eta)} \leq \frac{1}{(1-\gamma)^2}\frac{\lambda(\varphi)}{\lambda(\eta)} \leq \frac{1}{(1-\gamma)^4}\frac{\lambda(\varphi)}{\lambda(\eta)}$$

und damit die Behauptung des Satzes. □

Sei G eine lokalkompakte Gruppe, sei λ ein Haar-Integral und μ das zugehörige Haar-Maß auf G. Zwecks Notation schreiben wir

$$\lambda(\varphi) = \int_G \varphi(g) d\mu(g) = \int_G \varphi(g) d\lambda.$$

4.3 Die modulare Funktion

Wie wir im vorigen Abschnitt gesehen haben, existiert auf jeder (Hausdorffschen) lokalkompakten Gruppe G ein (bis auf Vielfache) eindeutiges linkstranslationsinvariantes Haar-Maß. Bei näherer Betrachtung stellt sich die Frage, wann ein solches Maß auch rechtstranslationsinvariant ist bzw. ob dies (allgemein?) überhaupt möglich ist. Wir beginnen diesen Abschnitt mit einigen Wiederholungen, G ist weiter stets lokalkompakt und Hausdorffsch.

Sei G gegeben. Wir betrachten die folgende Abbildung:

$$\begin{aligned} c\colon G &\to \operatorname{Aut}(G) \\ g &\mapsto c_g := (x \mapsto gxg^{-1}), \end{aligned}$$

welche ein Gruppenelement $g \in G$ auf die Konjugation mit g abbildet, welche natürlich ein Automorphismus der Gruppe G darstellt. Nehmen wir uns also ein Haar-Maß μ auf G, welches nach Satz 4.14 existiert.

Nach Satz 4.17 existiert nun aber eine reelle Zahl r, so dass für eine messbare Menge $A \subseteq G$ die Gleichheit

$$\mu(c_g(A)) = \mu(gAg^{-1}) = \mu(Ag^{-1}) = r\mu(A)$$

gilt. Da dieses r offenbar nur von $g \in G$ abhängt, können wir also eine Abbildung

$$\begin{aligned} \Delta\colon G &\to \mathbb{R}^\times \\ g &\mapsto \frac{\mu(c_g(A))}{\mu(A)} = \frac{\mu(Ag^{-1})}{\mu(A)} \end{aligned}$$

definieren. Damit haben wir bereits das Hauptobjekt dieses Abschnitts kennengelernt:

Definition 4.18. Sei G eine lokalkompakte Haussdorff-Gruppe. Dann heißt die Funktion $\Delta\colon G \to \mathbb{R}^\times$ *modulare Funktion* der Gruppe G.

Eine Gruppe G heißt *unimodular*, falls Δ konstant 1 ist. □

Anschaulich gesprochen misst die Funktion Δ, ob ein Haar-Maß auch rechtsinvariant ist bzw. wie stark es davon abweicht, rechtsinvariant zu sein.

Beobachtung 4.19. *Eine Gruppe G ist unimodular genau dann, wenn ein (und damit alle, vgl. Satz 4.17) Haar-Maß rechtsinvariant ist.*

Lemma 4.20. *Die modulare Funktion ist ein Gruppenhomomorphismus $G \to \mathbb{R}^\times$.*

Beweis. Übung. □

Bemerkung 4.21. Man kann sogar zeigen, dass für jede lokalkompakte Hausdorff-Gruppe der Homomorphismus $\Delta\colon G \to \mathbb{R}^\times$ stetig ist!

Wir werden nun einige hinreichende Kriterien kennenlernen, welche Unimodularität implizieren.

Satz 4.22. *Sei G eine lokalkompakte Hausdorff-Gruppe und sei Δ die modulare Funktion von G. Ferner erfülle G mindestens eine der folgenden Eigenschaften:*

(i) Die Gruppe G ist abelsch.

(ii) Die Gruppe G ist kompakt.

(iii) Die Gruppe G ist topologisch perfekt, d.h. $\overline{[G,G]} = G$.

(iv) Die Gruppe G ist diskret.

Dann ist Δ konstant und somit G unimodular.

Beweis. (i) Ist G abelsch, dann ist Konjugation der triviale Automorphismus und mithin gilt $\mu(A) = \mu(g^{-1}A) = \mu(Ag^{-1})$.

(ii) Ist G kompakt, dann ist das stetige Bild $\Delta(G) \leq \mathbb{R}^\times$ (vgl. Bemerkung 4.21) eine kompakte Untergruppe von $\mathbb{R}^\times$ und daher trivial.

(iii) Der Kern eines Homomorphismus von G in eine beliebige abelsche Gruppe enthält stets die Kommutatoruntergruppe (warum?), ist der Homomorphismus sogar stetig und die Zielgruppe Hausdorff, muss sein Kern den Abschluss der Kommutatoruntergruppe enthalten.

(iv) Übung. □

Beispiel 4.23. Wir werden in der Übung ein Beispiel einer nicht-unimodularen Gruppe kennenlernen. In der Tat wird dieses Beispiel sogar zeigen, dass es eine Gruppe G mit einem Normalteiler $N \trianglelefteq G$ gibt, so dass sowohl N als auch die Faktorgruppe G/N unimodular sind, aber G selbst nicht.

Beispiel 4.24. Die Gruppen $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ und $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ sid unimodular nach Satz 4.22 (iii).

Lemma 4.25. *Es gilt* $\int_G \varphi(gx^{-1})d\mu(g) = \Delta(x)\int_G \varphi(g)d\mu(g)$.

Beweis. Aus Linkstranslationsinvarianz folgt

$$\int_G \varphi(gx^{-1})d\mu(g) = \int_G \varphi(xgx^{-1})d\mu(g) = \int_G \varphi(g)d(\mu\circ c_x)(g) = \Delta(x)\int_G \varphi(g)d\mu(g).$$

□

4.4 Berechnung der modularen Funktion in total unzusammenhängenden Gruppen

Sei G lokalkompakt, T_2 und sei $U \subseteq G$ offene, kompakte Teilmenge. Dann ist die charakteristische Funktion χ_U stetig und hat kompakten Träger. Weiter gilt $\mu(U) = \int_G \chi(g)d\mu(g) = \int_U d\mu(g)$.

Ist $c_g \in \mathrm{Aut}(G)$ die Konjugation mit g, folgt also mit $\Delta(g) = \frac{\mu(c_g(U))}{\mu(U)}$ die Gleichung $\Delta(g) = \frac{\int_{Ug^{-1}} d\mu(g)}{\int_U d\mu(g)}$.

Lemma 4.26. *Sei lokalkompakt und total unzusammenhängend, sei $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathfrak{U}$ bestehend aus kompakten, offenen Teilmengen von G. Dann gilt:*

(i) Jede offene kompakte Teilmenge von G ist Vereinigung endlich vieler Nebenklassen von Elementen aus $\mathcal{B}$.

(ii) Sind C, D offene, kompakte Teilmengen, so existiert $B \in \mathcal{B}$, so dass C und D Vereinigungen von Translaten von B sind.

Proposition 4.27. *Sei G lokalkompakt, μ ein Haar-Maß auf G und $A \leq G$ offene, kompakte Untergruppe. Ist C offen kompakt in G und $B \leq A$ offen kompakt derart, dass C die Vereinigung von k Nebenklassen von B ist, so gilt*

$$\int_C d\mu = k\int_B d\mu = \frac{k}{|A/B|}\int_A d\mu.$$

Nun zur Berechnung von $\Delta(g)$:

Proposition 4.28. *Sei G lokalkompakt, $g \in G$ und $A \leq G$ offen kompakt. Dann gilt:*

$$\Delta(g) = \frac{\mu(Ag^{-1})}{\mu(A)} = \frac{\int_{Ag^{-1}} d\mu}{\int_A d\mu} = \frac{|Ag^{-1}/(A\cap Ag^{-1})|}{|A/(A\cap Ag^{-1})|}.$$

Satz 4.29. *Sei G lokalkompakt. Hat G einen offenen kompakten Normalteiler, dann ist G unimodular.*

Satz 4.30. *Sei S lokalkompakter total unzusammenhängender topologischer Ring, sei U offene kompakter Untergruppe von $(S,+)$. Für $a \in S^\times$ mit $aU \subseteq U$ gilt $\Delta(g) = |U/Ua|^{-1}$.*