Kapitel 3

Sätze der offenen Abbildung

Wir werden in diesem Abschnitt uns folgender Frage zuwenden: Wann ist ein Morphismus $f\colon G \to H$ von topologischen Gruppen offen, d.h. wann gilt für eine offene Menge $U \subseteq G$, dass $f(U) \subseteq H$ offen ist? Diese Frage wurde sicherlich bereits in der Vorlesung Topologie angesprochen, in unserem Bereich von der topologischen Gruppen gibt es jedoch einige stärkere Aussagen. Man vergleiche obige Fragestellung auch mit der kanonischen Zerlegung von Morphismen (vgl. Proposition 2.10), dort ist die Frage nach der Offenheit von Morphismen enthalten.

Proposition 3.1. *Sei G eine erstabzählbare topologische Gruppe, d.h. der Umgebungsfilter $\mathfrak{U}$ der Eins besitze eine abzählbare Basis. Dann existiert eine linksinvariante Metrik $d\colon G\times G \to \mathbb{R}$ auf G, welche die Topologie definiert.* □

Ist also eine topologische Gruppe G erstabzählbar, so macht es Sinn, von Konvergenz von Folgen zu sprechen. Insbesondere die bekannte Definition einer Cauchy-Folge überträgt sich wörtlich. Der Vollständigkeit halber fassen wir dies nochmal kurz zusammen.

Definition 3.2. Sei G eine erstabzählbare topologische Gruppe. Dann **konvergiert** eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $x \in G$, falls gilt:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) : d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Eine Folge heißt **Cauchy-Folge**, falls folgende Bedingung erfüllt ist:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \geq n_0) : d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Eine erstabzählbare topologische Gruppe G heißt **vollständig** (bezüglich der Metrik aus Proposition 3.1), wenn jede Cauchy-Folge konvergiert. □

Bevor wir zu den eigentlichen Kernaussagen kommen, werden wir einige äquivalente Bedingungen zur Offenheit von Morphismen beweisen, welche wir im Folgenden benutzen werden.

Proposition 3.3. *Seien G, H topologische Gruppen (nicht notwendigerweise Hausdorff) und sei $f\colon G \to H$ ein Morphismus. Betrachte die folgenden Bedingungen:*

(i) f ist offen.

(ii) *Für alle $U \in \mathfrak{U}_G$ gilt $\left(\overline{f(U)}\right)^\circ \neq \emptyset$.*

(iii) *Für alle $U \in \mathfrak{U}_G$ gilt $\overline{f(U)} \in \mathfrak{U}_H$.*

(iv) *Für alle offenen Mengen $U \subseteq G$ existiert eine offene Menge $V \subseteq H$ mit $f(U) \subseteq V \subseteq \overline{f(U)}$.*

(v) *Für alle offenen Mengen $U \subseteq G$ gilt $f(U) \subseteq \left(\overline{f(U)}\right)^\circ$.*

Die Bedingungen (ii) bis (v) sind äquivalent und werden von (i) impliziert.

Ist G erstabzählbar und vollständig und H Hausdorff, dann sind alle Bedingungen äquivalent.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei f offen und $U \in \mathfrak{U}$. Dann existiert $V \subseteq U$ offen mit $1 \in V \subseteq U$. Also ist $1 \in f(V) \subseteq f(U)$ und $f(V)$ ist offen. Schließlich ist $1 \in \left(\overline{f(U)}\right)^\circ$, und damit gilt (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Sei $U \in \mathfrak{U}$ und wähle ein $V \in \mathfrak{U}$ mit der Eigenschaft $VV^{-1} \subseteq U$. Nach (ii) existiert $v \in \left(\overline{f(V)}\right)^\circ$. Es folgt

$$1 = vv^{-1} \in \left(\overline{f(V)}\right)^\circ \left(\left(\overline{f(V)}\right)^\circ\right)^{-1} \subseteq \overline{f(V)}\;\overline{f(V)}^{-1} = \overline{f(V)f(V)^{-1}} \subseteq \overline{f(U)}$$

unter Verwendung der Stetigkeit der Multiplikation. Also ist $\overline{f(U)} \in \mathfrak{U}_H$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Sei $U \subseteq G$ offen. Dann ist für jedes $u \in U$ die Menge $u^{-1}U$ eine offene Eins-Umgebung. Nach (iii) sind also die Mengen $W(u) := \overline{f(u^{-1}U)}^\circ$ offene Eins-Umgebungen in H. Es folgt

$$f(u)W(u) = f(u)\overline{f(u^{-1}U)}^\circ = \left(\overline{f(u)f(u^{-1}U)}\right)^\circ = \overline{f(U)}^\circ.$$

Definieren wir nun $U' := \overline{f(U)}^\circ$, so folgt $f(U) \subseteq U' \subseteq \overline{f(U)}$.

Die Implikationen (iv) $\Rightarrow$ (v) und (v) $\Rightarrow$ (ii) sind trivial.

Es bleibt also zu zeigen, dass (i) und (ii) bis (v) unter den stärkeren Annahmen an G und H äquivalent sind.

Lemma 3.4. *Sei $X \subseteq G$. Dann gilt für $U \in \mathfrak{U}$ die Inklusion $\overline{X} \subseteq XU \cap UX$.*

Beweis. Dies folgt direkt aus Proposition 2.12 (i). □

Lemma 3.5. *Sei U eine Eins-Umgebung. Dann existiert eine symmetrische Eins-Umgebung $V = V^{-1}$ mit der Eigenschaft $\overline{VV} \subseteq U$.*

Beweis. Es gibt $W \in \mathfrak{U}$ mit $WWW \subseteq U$. Nach Lemma 3.4 gilt $\overline{WW} \subseteq WWW \subseteq U$. Setzen wir nun $V := W \cap W^{-1}$, dann ist V eine Eins-Umgebung und es gilt $V^{-1} = V$ und $\overline{VV} \subseteq U$, wie behauptet. □

Lemma 3.6. *Sei G eine erstabzählbare topologische Gruppe. Dann existiert eine Basis $B = \{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ von $\mathfrak{U}$ mit den Eigenschaften:*

(i) $U_n = U_n^{-1}$,

(ii) $\overline{U_n U_n} \subseteq U_{n-1}$ *(für* $n \geq 2$*).*

Beweis. Die Konstruktion der U_n ist rekursiv. Sei $\{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine beliebige Basis von $\mathfrak{U}$ und setze $U_1 := V_1$. Nehmen wir nun an, dass $U_1, \ldots, U_n$ mit obigen Eigenschaften existieren.

Nach Lemma 3.5 existiert eine symmetrische Eins-Umgebung $U_{n+1} \in \mathfrak{U}$ mit $\overline{U_{n+1}U_{n+1}} \subseteq U_n \cap V_{n+1}$. Damit folgt $U_{n+1} \subseteq V_{n+1}$ und $\overline{U_{n+1}U_{n+1}} \subseteq U_n$. Mit Induktion erhalten wir eine Folge von Eins-Umgebungen $B := \{U_n\}$, welche Eigenschaften (i) und (ii) erfüllen. Da zusätzlich $U_n \subseteq V_n$ gilt, ist B eine Basis für den Umgebungsfilter der Eins. $\square$

Lemma 3.7. *Sei G erstabzählbar und sei $B = \{U_n\}$ die Basis aus Lemma 3.6. Dann gilt für alle $k, m \in \mathbb{N}$:*

$$U_m U_{m+1} \ldots U_{m+k} \subseteq U_m U_m.$$

Beweis. Wir beweisen die Aussage per Induktion über k. Da $U_{m+1} \subseteq U_m$, ist die Aussage für $k = 1$ wahr.

Nach der Induktionsannahme gilt $U_{m+1} \cdots U_{m+k+1} \subseteq U_{m+1}U_{m+1}$. Weiter ist nach Lemma 3.6 (ii) $U_{m+1}U_{m+1} \subseteq U_m$. Es folgt:

$$U_m \cdots U_{m+k+1} \subseteq U_m U_{m+1} U_{m+1} \subseteq U_m U_m. \qquad \square$$

Wir werden nun die Vollständigkeit von G benutzen.

Lemma 3.8. *Sei $B = \{U_n\}$ die Basis aus Lemma 3.6 und sei weiter $x_k = g_0 \cdots g_k$ mit $g_j \in U_{m+j}$ für $j = 0, \ldots, k$.*

Dann ist $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\overline{U_m U_m}$. Ist G vollständig, so gilt für $m \geq 3$ die Inklusion $x := \lim x_k \in U_m$.

Beweis. Sei $p \in \mathbb{N}$. Wir berechnen mit Hilfe von Lemmas 3.7 und 3.6 (ii)

$$x_k^{-1} x_{k+p} = g_k^{-1} \cdots g_0^{-1} g_0 \cdots g_k g_{k+1} \cdots g_{k+p} = g_{k+1} \cdots g_{k+p} \in U_{m+k+1} U_{m+k+1} \subseteq U_{m+k}.$$

Da $B = \{U_n\}$ eine Basis des Umgebungsfilters der Eins ist, ist daher $\{g_k\}$ eine Cauchy-Folge. Aus der Vollständigkeit von G folgt nun die Existenz von $x := \lim x_k$. Für x gilt aber $x \in \overline{U_m U_m} \subseteq U_{m-1}$. $\square$

Lemma 3.9. *Sei Bedingung (iv) aus Proposition 3.3 erfüllt, mit G vollständig und H Hausdorff. Wähle B als Basis für den Umgebungsfilter wie in Lemma 3.6 und für jedes $n \in \mathbb{N}$, wähle U'_n bezüglich U_n wie in (iv) von Proposition 3.3.*

Dann gilt $U'_n \subseteq f(U_{n-1})$. $\square$

Zurück zum Beweis von Proposition 3.3.

(iv) $\Rightarrow$ (i): Nach Lemma 3.9 hat das Bild $f(U_n)$ nicht-leeres Inneres für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Proposition 2.9 ist also f offen. $\square$

Definition 3.10. Ein topologischer Raum X heißt **unausschöpfbar**, falls für jede abzählbare Familie abgeschlossener Mengen A_n mit $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ein n_0 existiert mit $a_n^\circ \neq \emptyset$. Anders formuliert, X ist *keine* Vereinigung von abzählbar vielen abgeschlossenen Mengen mit leerem Inneren.

Ein Raum X heißt **Baire-Raum**, falls jede Vereinigung von abzählbar vielen abgeschlossenen Mengen mit leerem Inneren selbst wieder leeres Inneres hat. $\square$

Eine einfache Konsequenz ist, dass jeder Baire-Raum unausschöpfbar ist.

Satz 3.11 (Bairescher Kategoriensatz)**.** *Sei X ein Raum, der mindestens eine der folgenden Bedingungen erfüllt:*

(i) X ist ein lokalkompakter Hausdorff-Raum,

(ii) jeder Punkt in X hat eine abgeschlossene Umgebung, welche ein vollständiger materischer Raum bezüglich einer die Topologie definierenden Metrik ist.

Dann ist X ein Baire-Raum.

Beweis. Siehe [N. Bourbaki, Topologie générale, Chap. 9, §3, no. 3, Théoreme 1]. $\square$

Wir sind nun soweit, einen der Hauptsätze dieses Abschnitts formulieren zu können.

Satz 3.12 (Satz der Offenen Abbildung A)**.** *Sei G erstabzählbar, separabel und vollständig, sei H unausschöpfbar und Hausdorff. Weiter sei $f\colon G \to H$ ein surjektiver Morphismus topologischer Gruppen.*

Dann ist f offen.

Beweis. Wir zeigen, dass der Abschluss jedes Bilds einer Eins-Umgebung nicht-leeres Inneres hat, Proposition 3.3 liefert uns dann die Offenheit von f.

Sei $U \in \mathfrak{U}$ und sei D eine abzählbare dichte Menge in G. Dann gilt $G = \overline{D} \subseteq DU$ nach Proposition 2.12 (i). Also folgt mit Surjektivität von f

$$H = f(G) = \bigcup_{d\in D} f(d)f(U) \subseteq \bigcup_{d\in D} f(d)\overline{f(U)}.$$

Da D abzählbar und H unausschöpfbar ist, existiert $d \in D$, sodass $(\overline{f(d)f(U)})^\circ = f(d)(\overline{f(U)})^\circ$ nicht-leer ist. Also ist $\overline{f(U)}^\circ \neq \emptyset$. $\square$

Ein Raum X heißt **Polnisch**, wenn er vollständig metrisierbar und zweitabzählbar ist.

Korollar 3.13. *Ein surjektiver Morphismus zwischen Hausdorffschen Polnischen Gruppen ist offen.*

Beweis. Nach Satz 3.11 ist jede Polnische Gruppe unausschöpfbar und Satz 3.12 liefert das Gewünschte. $\square$

Ein Raum X heißt σ-kompakt, wenn er eine abzählbare Vereinigung kompakter Mengen ist.

Satz 3.14. *Sei G lokalkompakt und σ-kompakt, sei H unausschöpfbar und Hausdorff und sei $f\colon G \to H$ ein surjektiver Morphismus.*

Dann ist f offen.

Beweis. Sei $U \in \mathfrak{U}$ offen mit $\overline{U}$ kompakt. Da G σ-kompakt ist, existiert eine abzählbare Familie K_n kompakter Mengen mit $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Da U eine Eins-Umgebung ist, folgt für jedes n die Inklusion $K_n \subseteq \bigcup_{k\in K_n} kU$. Da $\bigcup_{k\in K_n} kU$ eine Überdeckung von K_n mit offenen Mengen ist, existiert eine endliche Menge $F_n \subseteq K_n$ mit $K_n \subseteq \bigcup_{k\in F_n} kU$. Also ist $C := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ abzählbar und es gilt

$$G \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n \subseteq \bigcup_{c\in C} cU \subseteq G.$$

Da $\overline{U}$ kompakt ist, ist auch $f(\overline{U})$ kompakt in H und mithin abgeschlossen (da H Hausdorff ist). Surjektivität von f impliziert nun $H = \bigcup_{c\in C} f(cU) \subseteq \bigcup_{c\in C} f(c)f(\overline{U})$. Aber H ist unausschöpfbar, demnach existiert $c_0 \in C$, so dass das Innere von $f(c)f(\overline{U})$ nicht leer ist. Also ist $f(\overline{U})^\circ$ nicht leer.

Da G lokalkompakt ist, enthält jede Eins-Umgebung eine Umgebung obiger Form, und Proposition 3.3 liefert uns die Offenheit von f. $\square$

Korollar 3.15. *Sind G und H Hausdorff und lokalkompakt und G zusätzlich σ-kompakt, dann ist jeder surjektive Morphismus $f\colon G \to H$ offen.*

Beweis. Nach dem Baireschen Kategoriensatz (Satz 3.11) ist jede Hausdorffsche lokalkompakte Gruppe unausschöpfbar und wir können Satz 3.14 anwenden. $\square$

Satz 3.16. *Seien G und H Hausdorff und $f\colon G \to H$ ein surjektiver Morphismus. Nehmen wir weiter an, dass G die additive Gruppe eine erstabzählbaren vollständigen topologischen Vektorraums, und H unausschöpfbar sei. Schließich seien die Potenzabbildungen $p_n\colon H \to H, h \mapsto h^n$ Homöomorphismen.*

Dann ist f offen.

Beweis. Sei $U \in \mathfrak{U}$. Für jedes $g \in G$ existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n}g \in U$. Also ist $G = U \cup 2U \cup 3U \ldots$, und es folgt

$$H = f(G) = f(U) \cup f(2U) \ldots = f(U) \cup p_2(f(U)) \cup p_3(f(U)) \subseteq \overline{f(U)} \cup p_2(\overline{f(U)}) \cup p_3(\overline{f(U)}) \ldots$$

Nun sind die Abbildungen p_n abgeschlossen, also ist $p_n(\overline{f(U)})$ abgeschlossen. Die Gruppe H ist unausschöpfbar, also existiert $n \in \mathbb{N}$, so dass $p_n(\overline{f(U)})$ nicht-leeres Inneres hat. Also ist auch das Innere von $\overline{f(U)}$ nicht leer, und Proposition 3.3 liefert die Offenheit von f. $\square$

Korollar 3.17. *Seien G, H Hausdorffsche topologische Vektorräume (d.h. Vektorräume über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ jeweils mit der Ordnungstopologie, sodass Vektoraddition und skalare Multiplikation stetig sind), wobei G erstabzählbar und vollständig sowie H unausschöpfbar seien. Sei $f\colon G \to H$ ein stetiger linearer Operator.*

Dann ist f offen. $\square$