Kapitel 2

Topologische Gruppen

2.1 Definitionen

Definition 2.1. Sei G eine Gruppe und sei τ eine Topologie auf G. Dann heißt (G, τ) (oder auch nur G, falls die Topologie τ aus dem Kontext klar ist) **topologische Gruppe**, falls die beiden Abbildungen

$$\begin{aligned}\mu_G \colon G \times G &\to G,\\ (g, h) &\mapsto gh,\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\eta_G \colon G &\to G,\\ g &\mapsto g^{-1},\end{aligned}$$

stetig sind. (Der Raum $G \times G$ trägt die Produkttopologie.) $\square$

Aufgabe 2.2. (i) Sei G eine Gruppe und sei τ eine Topologie auf G. Zeigen Sie: (G, τ) ist eine topologische Gruppe genau dann wenn die Abbildung

$$\begin{aligned}G \times G &\to G,\\ (g, h) &\mapsto gh^{-1},\end{aligned}$$

stetig bezüglich τ ist.

(ii) Sei H eine Untergruppe von einer topologischen Gruppe G (mit der Teilraumtopologie). Zeigen Sie: G wirkt topologisch auf dem Quotientenraum $G/H := \{gH \mid g \in G\}$, d.h. die Abbildung

$$(g, g'H) \mapsto gg'H$$

ist stetig. Demnach ist G/H homogen, vgl. Korollar 2.4.

(iii) Zeigen Sie: Der Quotientenraum G/H ist Hausdorff genau dann wenn $H \subseteq G$ abgeschlossen ist.

Proposition 2.3. *Sei G eine topologische Gruppe und sei $g \in G$. Betrachte die beiden Translationsabbildungen*

$$\begin{aligned}\lambda_g \colon G &\to G,\\ h &\mapsto gh,\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\rho_g \colon G &\to G,\\ h &\mapsto hg.\end{aligned}$$

Die Abbildungen λ_g und ρ_g sind Homöomorphismen (des topologischen Raums G), d.h. sie sind bijektiv, stetig und offen.

Beweis. Da G topologische Gruppe ist, sind λ_g und ρ_g Einschränkungen der stetigen Abbildung $G \times G \to G, (g,h) \mapsto gh$ (jeweils ein Argument wird festgehalten), daher sind sie stetig.

Für die Inversen gilt:

$$(\lambda_g)^{-1} = \lambda_{g^{-1}}, \quad (\rho_g)^{-1} = \rho_{g^{-1}},$$

daher sind λ_g und ρ_g bijektiv. Weiter sind die Inversen nach obigem Argument stetig, daher sind λ_g und ρ_g auch offen. Also sind sie Homöomorphismen. □

Korollar 2.4. *Sei G eine topologische Gruppe. Dann gilt:*

(i) G ist homogen.

(ii) Ist $H \leq G$ eine Untergruppe, dann ist der Quotient G/H homogen.

Beweis. Seien $g, h \in G$. Dann ist die Abbildung $\lambda_{hg^{-1}} \in \mathrm{Homeo}(G)$ nach Proposition 2.3 und es gilt

$$\lambda_{hg^{-1}}(g) = hg^{-1}g = h.$$

Also ist G homogen.

Weiter ist die Wirkung von G auf G/H stetig (vgl. Aufgabe 2.2) und transitiv, damit ist nach Beobachtung 1.2 der Raum G/H ebenfalls homogen. □

Beispiel 2.5. (i) Jede Gruppe, ausgestattet mit der diskreten oder indiskreten Topologie, ist eine topologische Gruppe.

(ii) Die multiplikativen Gruppen $\mathbb{R}^*$ und $\mathbb{C}^*$ sind (kommutative) topologische Gruppen bzgl. der Teilraumtopologie induziert von $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$.

(iii) Die Gruppen $(\mathbb{R}^n, +)$ und $(\mathbb{C}^n, +)$ sind topologische Gruppen, ebenfalls kommutativ.

(iv) Die Gruppen $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ und $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ sind nicht-Abelsche topologische Gruppen.

(v) Der Torus $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ ist eine topologische Gruppe, vgl. Übung.

2.2 Untergruppen und Faktorgruppen

Wie aus der Einführung in die Algebra bekannt sein dürfte, kann man aus gegebenen Gruppen neue konstruieren, beispielsweise durch Untergruppen, direkt Produkte von Gruppen und Faktorgruppen (d.h. durch Herausfaktorisieren eines Normalteilers). Wir werden nun sehen, dass dies in der Kategorie der topologischen Gruppen ebenfalls funktioniert.

Proposition 2.6. *(i) Ist $H \leq G$ Untergruppe, dann ist H mit der Teilraumtopologie ebenfalls eine topologische Gruppe.*

(ii) Sei $\{G_i\}_{i \in I}$ beliebige Familie topologischer Gruppen. Dann ist das Produkt $\prod_{i \in I} G_i$, ausgestattet mit der Produkttopologie, eine topologische Gruppe.

(iii) Ist $N \trianglelefteq G$ Normalteiler von G, dann ist G/N eine topologische Gruppe bezüglich der Quotiententopologie. Weiter ist G/N Hausdorff genau dann wenn N abgeschlossener Normalteiler ist.

Beweis. Übung. □

Wir haben bereits gesehen, dass ein Quotient G/H einer topologischen Gruppe G modulo einer Untergruppe H genau dann Hausdorff ist, wenn H abgeschlossen ist. Es stellt sich also die Frage, ob Abschlüsse von Untergruppen ebenfalls wieder eine entsprechende Struktur haben, also beispielsweise Untergruppen sind.

Proposition 2.7. *Sei G topologische Gruppe und seien $H \leq G$, $N \trianglelefteq G$. Dann ist $\overline{H}$ eine Untergruppe von G und $\overline{N}$ ist ein Normalteiler von G.*

Beweis. Sei $H \leq G$ und betrachte $\overline{H}$. Wir müssen zeigen, dass für $g, h \in \overline{H}$ auch das Produkt gh in $\overline{H}$ liegt. Seien daher g_λ und h_μ Netze in H, welche gegen g bzw. h konvergieren. Wegen der Stetigkeit der Multiplikation gilt:

$$gh = (\lim g_\lambda)(\lim h_\mu) = \lim(\underbrace{g_\lambda h_\mu}_{\in H}) \in \overline{H}.$$

Also ist $\overline{H}$ eine Untergruppe.

Ist N Normalteiler von G und $n \in \overline{N}$, so gilt für ein Netz $n_\lambda \in N$ mit $\lim n_\lambda = n$ analog:

$$gng^{-1} = g(\lim n_\lambda)g^{-1} = \lim(\underbrace{gn_\lambda g^{-1}}_{\in N}) \in \overline{N}.$$ □

2.3 Morphismen

Kombiniert man die Definitionen von Morphismen von topologischen Räumen (stetige Abbildungen) und von Gruppen (Gruppenhomomorphismen), so sehen wir, dass es sinnvoll ist, Folgendes zu definieren: Ein **Morphismus** (von topologischen Gruppen) ist ein stetiger Gruppenhomomorphismus. Demnach ist ein **Isomorphismus** topologischer Gruppen ein Gruppenhomomorphismus, welcher zugleich ein Homöomorphismus der zu Grunde liegenden topologischen Räume ist.

Proposition 2.8. *Seien G, H topologische Gruppen und $f\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann ist f stetig genau dann wenn f stetig in der $1_G \in G$ ist.*

Beweis. Da jeder stetige Gruppenhomomorphismus per Definition stetig in der Eins ist, ist nur die Rückimplikation zu zeigen. Sei $g \in G$ und $U \in \mathfrak{U}(f(g))$, dann ist $V := f^{-1}(U) = gf^{-1}(f(g)^{-1}U)$ eine Umgebung von g mit $f(V) \subseteq U$ (hierbei haben wir Proposition 2.3 zwei Mal benutzt!). Also ist f stetig in $g \in G$, und da g beliebig war, ist f global stetig. □

Wir zeigen nun einige äquivalente Formulierungen für die Offenheit von Morphismen. Diese werden wir insbesondere im (späteren) Kapitel hinsichtlich der Sätze der offenen Abbildungen benutzen.

Zur Erinnerung: Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt **offen**, falls für alle offenen Mengen $U \subseteq X$ auch $f(U) \subseteq Y$ offen ist.

Proposition 2.9. *Sei $f\colon G \to H$ ein Morphismus von topologischen Gruppen. Dann sind äquivalent:*

(i) f ist offen.

(ii) Für jedes $U \in \mathfrak{U}$ gilt: Das Bild $f(U)$ hat nicht-leeres Inneres.

(iii) Es gibt eine Basis B von $\mathfrak{U}$, so dass für jedes $U \in B$ das Bild $f(U)$ nicht-leeres Inneres hat.

(iv) Es gibt eine Basis B von $\mathfrak{U}$, so dass für $U \in B$ auch $f(U)$ eine Eins-Umgebung in H ist.

(v) Für alle $U \in \mathfrak{U}_G$ gilt $f(U) \in \mathfrak{U}_H$.

Beweis. (i) ⇒ (ii): Sei $U \in \mathfrak{U}$. Dann ist $f(U^\circ)$ offene Eins-Umgebung. Es folgt $1 \in f(U^\circ) \subseteq f(U)$. Also hat $f(U)$ nicht-leeres Inneres.

(ii) ⇒ (iii): Klar.

(iii) ⇒ (iv): Sei $U_1 \in B$ und wähle ein $V_1 \in B$ mit der Eigenschaft $V_1V_1^{-1} \subseteq U$. Nach (iii) ist $W := f(V)^\circ$ nicht leer. Definiere zusätzlich $V_2 := f^{-1}(W)$, eine nicht-leere offene Menge in G.

Sei nun $v_2 \in V_2$, dann ist $f(v_2) \in W = f(V_1)^\circ$. Schliesslich sei $U := V_1 v_2^{-1}$. Es folgt nun

$$1_G = v_2 v_2^{-1} \in (V_1 v_2^{-1})^\circ,$$

daher ist U eine Eins-Umgebung. Weiter ist $U \subseteq V_1V_1^{-1} \subseteq U_1$ und es gilt

$$1_H = f(v_2)f(v_2)^{-1} \in (f(V_1))^\circ f(v_2^{-1}) = (f(V_1)f(v_2)^{-1})^\circ = f(U)^\circ.$$

Also ist $f(U)$ eine Eins-Umgebung.

(iv) ⇒ (v): Per Definition eines Filters.

(v) ⇒ (i): Sei $U \subseteq G$ offen und o.B.d.A. sei $U \neq \emptyset$. Wähle $u \in U$. Dann ist $Uu^{-1} \in \mathfrak{U}$ und nach (v) wissen wir, dass $f(U)f(u)^{-1} = f(Uu^{-1}) \in \mathfrak{U}_H$. Daher ist $f(U)$ eine Umgebung von $f(u)$. Da u beliebig war, ist $f(U)$ Umgebung jedes Punktes und demnach offen. □

Zur Vollständigkeit geben wir folgendes Resultat ohne Beweis an.

Proposition 2.10. *Seien G, H topologische Gruppen und sei $f\colon G \to H$ ein Morphismus (topologischer Gruppen) mit Kern $N := \ker(f)$. Dann kann f kanonisch zerlegt werden in der Form*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & H \\ G/N \arrow[r, "f'"'] & f(G), \arrow[u, "\iota"'] \end{tikzcd}$$

wobei $q\colon G \to G/N$ der Quotientenmorphismus bzgl. N und $\iota\colon f(G) \to H$ die Inklusion, und $f'\colon G/N \to f(G)$ der bijektive Morphismus $f'(gN) := f(g)$ ist.

Weiterhin ist f offen genau dann wenn $f(G)$ offen in H und zusätzlich f' ein Isomorphismus topologischer Gruppen ist. Der Morphismus f' ist ein Isomorphismus genau dann wenn f offen auf sein Bild ist, d.h. $f(U)$ ist offen in $f(G)$ für alle offenen Mengen $U \subseteq G$.

Obige Zerlegung ist besonders bei der Untersuchung von (stetigen) Gruppenwirkungen hilfreich, die Punktstabilisatoren G_x unter der Wirkung haben die Rolle des Normalteilers, während ι die Inklusion der Bahnen von G unter der Wirkung darstellt.

Beispiel 2.11. Ist $G = \mathbb{R}$ die additive Gruppe der reellen Zahlen mit der diskreten Topologie und $H = \mathbb{R}$ die additive Gruppe von $\mathbb{R}$ mit der gewöhnlichen Topologie, so ist die Identität $\mathrm{id}\colon G \to H$ ein Morphismus topologischer Gruppen. Weiter ist f sogar bijektiv, aber kein Isomorphismus (Warum?). Zudem ist $f' = f$ in kanonischer Weise, d.h. f' ist auch kein Isomorphismus topologischer Gruppen.

In diesem Sinne ist die Warnung angebracht, dass f' im Allgemeinen kein Isomorphismus ist (in der Kategorie der Gruppen ist dies natürlich der Fall)!

2.4 Der Umgebungsfilter der Eins

Wie angekündigt wenden wir uns nun dem Umgebungsfilter der Eins zu. Dieser ist ein wichtiges Instrument in dem Sinne, als dass er bereits alle (topologischen) Informationen der umliegenden topologischen Gruppe enthält. Zuerst wenden wir uns jedoch einigen technischen Aussagen zu.

Wir schreiben $\mathfrak{U}(1) := \{U \subseteq G \mid U \text{ ist Umgebung der } 1_G\}$ für den Umgebungsfilter der Eins.

Proposition 2.12. *Sei G eine topologische Gruppe und sei $A \subseteq G$ eine Teilmenge.*

(i) Es gilt $\overline{A} = \bigcap_{U \in \mathfrak{U}(1)} AU = \bigcap_{U \in \mathfrak{U}(1)} \overline{AU}$.

(ii) Ist A abgeschlossen und $K \subseteq G$ kompakt, dann ist AK abgeschlossen.

Beweis. (i) Sei $U \in \mathfrak{U}(1)$ und $x \in \overline{A}$. Dann ist xU^{-1} eine Umgebung von x, und demnach ist $A \cap xU^{-1}$ nicht leer. Wähle $a \in A \cap xU^{-1}$ und schreibe $a = xu^{-1}$ mit einem $u^{-1} \in U^{-1}$. Dann folgt $x = au \in AU \subseteq \overline{AU}$.

Für die umgekehrte Inklusion sei $x \in \bigcap_{U \in \mathfrak{U}(1)} \overline{AU}$. Wir zeigen zunächst $x \in \bigcap_{U \in \mathfrak{U}(1)} AU$. Sei dazu $U \in \mathfrak{U}(1)$. Da die Multiplikation stetig ist, finden wir ein $U' \in \mathfrak{U}(1)$ mit der Eigenschaft $U'U' \subseteq U$. Es folgt $x \in \overline{AU'} \subseteq AU'U' \subseteq AU$.

Sei nun V eine Umgebung von x. Wir zeigen nun $V \cap A \neq \emptyset$, woraus $x \in \overline{A}$ folgt. Die Menge $U := V^{-1}x$ ist eine Umgebung der Eins, also ist $x \in AU$. Schreiben wir $x = au$ mit $a \in A$, $u \in U$, so folgt

$$a = xu^{-1} \in xU^{-1} = xx^{-1}V = V,$$

woraus $a \in A \cap V$ und damit die Behauptung folgt.

(ii) Sei $g \in \overline{AK}$. Wir zeigen, dass $g \in AK$. Sei $U \in \mathfrak{U}(1)$. Dann ist gU eine Umgebung von g, also ist $gU \cap AK \neq \emptyset$. Umschreiben liefert $K \cap A^{-1}gU \neq \emptyset$.

Demnach ist die Familie

$$\{K \cap \overline{Ag^{-1}U} \mid U \in \mathfrak{U}(1)\} \tag{2.1}$$

eine Filterbasis abgeschlossener Mengen in K. Da K kompakt ist, ist der Schnitt aller Mengen in (2.1) nicht leer. Sei also k ein Punkt im Schnitt. Dann ist nach (i)

$$k \in \bigcap_{U \in \mathfrak{U}(1)} A^{-1}gU = \overline{A^{-1}g}.$$

Da weiter $\overline{A^{-1}g} = \overline{A^{-1}}g$ und $\overline{A^{-1}} = \overline{A}^{-1} = A^{-1}$ gilt (A ist abgeschlossen), existiert ein $a \in A$ mit der Eigenschaft $k = a^{-1}g$. Damit haben wir gezeigt, dass $g = ak \in AK$ gilt und AK ist deshalb abgeschlossen.

□

Korollar 2.13. *Sei G eine topologische Gruppe. Dann gilt:*

(i) $\overline{\{1\}} = \bigcap \mathfrak{U}(1) = \bigcap_{U \in \mathfrak{U}(1)} U$.

(ii) Die Untergruppe $\overline{\{1\}}$ ist ein abgeschlossener Normalteiler, welcher in jeder offenen oder abgeschlossenen Menge enthalten ist, die $\overline{\{1\}}$ nichttrivial schneidet.

(iii) Die Menge $\{1\}$ ist dicht in G genau dann wenn G die indiskrete Topologie trägt.

(iv) Ist $K \subseteq G$ kompakt, so ist $\overline{\{1\}}K = \overline{K}$.

(v) Ist $U \in \mathfrak{U}(1)$, so existiert eine abgeschlossene Eins-Umgebung $C \subseteq U$. D.h. jeder Umgebungsfilter $\mathfrak{U}(g)$ von $g \in G$ hat eine Basis bestehend aus abgeschlossenen Mengen.

Für eine Hausdorff-Gruppe G sind natürlich Aussagen (ii), (iii) und (iv) trivial.

Beweis. (i) Folgt aus Proposition 2.12 (i).

(ii) Proposition 2.7 liefert, dass $\overline{\{1\}}$ abgeschlossener Normalteiler ist. Sei $U \subseteq G$ offen mit $U \cap \overline{\{1\}} \neq \emptyset$. Hieraus folgt, dass $1 \in U$ enthalten sein muss und U damit eine Eins-Umgebung ist. Nach (i) ist aber $\overline{\{1\}} \subseteq U$.

Ist A abgeschlossen und $A \cap \overline{\{1\}} \neq \emptyset$, dann ist $\overline{\{1\}} \nsubseteq (G \setminus A)$ und, nach (i), $\overline{\{1\}} \cap (G \setminus A) = \emptyset$. Es folgt $\overline{\{1\}} \subseteq A$.

(iii) Sei $U \subseteq G$ offen und nicht leer. Ist $\{1\}$ dicht in G, so folgt $G = \overline{\{1\}} \subseteq U$ nach (ii).

(iv) Nach Proposition 2.12 (ii) ist $\overline{\{1\}}K$ abgeschlossen, schließlich ist $\overline{K} \subseteq \overline{\{1\}}K$. Hingegen können wir wegen der Stetigkeit der Multiplikation $\overline{\{1\}}K \subseteq \overline{\{1\}K} = \overline{K}$ schließen. Es folgt $\overline{\{1\}}K = \overline{K}$.

(v) Stetigkeit der Multiplikation erlaubt uns, ein $V \in \mathfrak{U}(1)$ mit der Eigenschaft $VV \subseteq U$ zu wählen. Nun gilt mit Proposition 2.12 (i)

$$C := \overline{V} \subseteq VV \subseteq U,$$

und per Konstruktion ist $C \in \mathfrak{U}(1)$. Also hat $\mathfrak{U}(1)$ eine Basis bestehend aus abgeschlossenen Mengen. Da G homogen ist (Korollar 2.4), hat jeder Umgebungsfilter $\mathfrak{U}(g)$ eine solche Basis.

□

Man bemerke, dass alle Resultate bisher keinerlei Trennungsaxiome benutzen. Insbesondere die vorstehenden Abschlussrelationen gelten in beliebigen topologischen Gruppen, seien sie Hausdorff oder nicht.

2.5 Trennungsaxiome

Trennungsaxiome in der klassischen Topologie reichen von T_0 bis T_5; inklusive $T_{3\frac{1}{2}}$. Dabei implizieren Trennungsaxiome mit größerem Index stets die mit kleinerem, umgekehrt existieren jedoch Gegenbeispiele. Wie wir nun sehen werden, ist dies bei topologischen Gruppen nur bedingt der Fall.

Satz 2.14. *Sei G eine topologische Gruppe. Dann sind äquivalent:*

(i) G ist ein T_0-Raum.

(ii) Die Menge $\{1\}$ ist abgeschlossen.

(iii) G ist ein T_1-Raum.

(iv) G ist Hausdorff, d.h. G ist T_2.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Wähle $1 \neq x \in G$. Nach (i) existiert eine offene Menge U, welche entweder 1 oder x enthält. Falls $1 \in U$, nehmen wir also an, dass $x \notin U$. Dann ist $1 \in U^{-1}$ und $x \in U^{-1}x$. Also ist $U^{-1}x$ eine offene Umgebung von x, welche die 1 nicht enthält; andernfalls wäre $1 = u^{-1}x$ und damit $u = x \in U$. Wir haben also gezeigt, dass jedes $x \neq 1$ eine offene Umgebung besitzt, welche 1 nicht enthält. Dies impliziert (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Homogenität von G liefert für beliebiges $g \in G$, dass $\overline{\{g\}} = g\overline{\{1\}} = \{g\}$ nach (ii).

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Seien $x \neq y \in G$. Dann gilt $xy^{-1} \neq 1$ und mit (iii) folgt, dass $G \setminus \{xy^{-1}\}$ eine offene Eins-Umgebung ist. Wir finden also eine offene Eins-Umgebung $V \in \mathfrak{U}(1)$ mit der Eigenschaft $V^{-1}V \subseteq G \setminus \{xy^{-1}\}$. Wir behaupten nun, dass die (offenen) Mengen Vx und Vy disjunkt sind.

Wäre $g \in Vx \cap Vy$, also $g = vx = wy$, folgte $xy^{-1} = v^{-1}w \in V^{-1}V \subseteq G \setminus \{xy^{-1}\}$, ein Widerspruch. Also sind Vx und Vy disjunkte offene Umgebungen von x und y.

(iv) $\Rightarrow$ (i): Trivial. □

Der Vollständigkeit halber sei angemerkt, dass die angegebenen Punkte aus Satz 2.14 ebenfalls äquivalent dazu sind, dass G regulär Hausdorffsch ist.

Satz 2.14 liefert als einfachen Korollar auch folgende bekannte Aussage, vgl. Aufgabe 2.2.

Korollar 2.15. *Sei $N \trianglelefteq G$. Dann ist die topologische Gruppe G/N Hausdorff genau dann wenn $N \subseteq G$ abgeschlossen ist.* □

Korollar 2.16. *Sei G eine topologische Gruppe. Dann ist die Gruppe $G/\overline{\{1\}}$ Hausdorff.*

Weiterhin existiert für jeden Morphismus $f\colon G \to H$ von topologischen Gruppen mit H Hausdorffsch ein eindeutiger Morphismus $f'\colon G/\overline{\{1\}} \to H$ mit der Eigenschaft $f = f' \circ q$, wobei $q\colon G \to G/\overline{\{1\}}$ der kanonische Quotientenmorphismus ist. □

2.6 Die Zusammenhangskomponente der Eins

Wie bereits aus der Vorlesung Topologie bekannt ist, definiert für einen topologischen X die Zusammenhangsrelation eine Äquivalenzrelation. Das heißt, die Menge X lässt sich partitionieren in paarweise disjunkte Zusammenhangskomponenten X_i, welche maximal bezüglich der Eigenschaft *Zusammenhang* sind. (Zur Erinnerung: Ein topologischer Raum X heißt zusammenhängend, wenn $\emptyset$ und X die einzigen offenen und gleichzeitig abgeschlossenen Teilmengen sind.)

Definition 2.17. Sei G eine topologische Gruppe. Dann bezeichnen wir mit G° die Zusammenhangskomponente der Eins.

Eine Untergruppe $H \leq G$ heißt charakteristisch, falls H invariant unter allen Automorphismen (stetige und stetig invertierbare Endomorphismen) von G ist. □

Die Gruppe G° ist ein Beispiel einer charakteristischen Untergruppe.

Proposition 2.18. *Die Zusammenhangskomponente der Eins ist eine abgeschlossene charakteristische Untergruppe. Die Faktorgruppe G/G° ist eine total unzusammenhängende Hausdorffsche topologische Gruppe (unabhängig davon, ob G Hausdorff ist oder nicht).*

Ist G° zusätzlich offen, so ist G/G° diskret.

Beweis. Der Abschluss einer zusammenhängenden Menge ist zusammenhängend (warum?), also ist $\overline{G^\circ}$ zusammenhängend. Da G° aber maximal war und $G^\circ \subseteq \overline{G^\circ}$, folgt Gleichheit und somit Abgeschlossenheit von G°.

Sei α ein Automorphismus von G. Dann ist $\alpha(G^\circ)$ eine zusammenhängende, normale Untergruppe, welche die Eins enthält, also ist $\alpha(G^\circ) \subseteq G^\circ$. Mit dem gleichen Argument sehen wir, dass $\alpha^{-1}(G^\circ) \subseteq G^\circ$, was die Inklusion $G^\circ \subseteq \alpha(G^\circ)$ impliziert.

Mit Proposition 2.7 und Korollar 2.15 folgt nun sofort, dass G/G° eine Hausdorffsche Gruppe ist. Sei $1 \neq x \in G/G^\circ$. Dann sind $q^{-1}(1)$ und $q^{-1}(x)$ zwei Zusammenhangskomponenten von G. Insbesondere ist $q^{-1}(1) \cup q^{-1}(x)$ nicht zusammenhängend. Daher sind $q^{-1}(1)$ und $q^{-1}(x)$ beide offen und abgeschlossen in $q^{-1}(1) \cup q^{-1}(x)$. In der Menge $\{1, x\} \subseteq G/G^\circ$ sind also $\{1\}$ und $\{x\}$ ebenfalls beide offen und abgeschlossen, und $\{1, x\}$ ist nicht zusammenhängend. Da x beliebig war und G/G° homogen ist, folgt die Behauptung.

Ist G° offen, so ist $q(G^\circ)$ offen in G/G°. Da $q(G^\circ)$ gerade die Eins in G/G° ist, ist diese Gruppe diskret. □

Nennen wir eine Menge $U \subseteq G$ **abgeschloffen**, wenn sie gleichzeitig offen und abgeschlossen ist. Wir bezeichnen weiter mit $\mathcal{OC}(G)$ die Menge aller abgeschloffenen Teilmengen von G.

Lemma 2.19. *Die Menge*

$$\bigcap\{U \in \mathcal{OC}(G) \mid 1 \in U\}$$

ist eine charakteristische Untergruppe.

Beweis. Übung. □

Proposition 2.20. *Sei G eine topologische Gruppe und $\mathcal{OC}(G)$ wie oben, weiter sei $q\colon G \to G/G^\circ$ der kanonische Quotientenmorphismus. Dann gilt:*

(i) Ist $U \in \mathcal{OC}(G)$, so ist $G^\circ U = UG^\circ = U$.

(ii) Die Abbildung $U \mapsto q^{-1}(U)$ ist eine Bijektion $\mathcal{OC}(G/G^\circ) \to \mathcal{OC}(G)$.

Beweis. Ist $u \in U$, so ist uG° eine zusammenhängende Menge und $U \cap uG^\circ$ ist eine abgeschloffene Menge in uG°. Also ist $uG^\circ \subset U$.

Mit Hilfe dieser Aussage sehen wir, dass $V \mapsto q(V)$ die inverse Abbildung zu $U \mapsto q^{-1}(U)$ ist. □

Bemerkung 2.21. Es gibt zusammenhängende topologische Gruppen, welche nicht wegzusammenhängend sind. Ein Beispiel hierfür ist der p-adische Solenoid $\mathbb{T}_p$, den man als projektiven Limes des Systems

$$\mathbb{T} \xleftarrow{p} \mathbb{T} \xleftarrow{p} \mathbb{T} \xleftarrow{p} \dots$$

erhält, wobei p eine Primzahl ist und obige Abbildungen Multiplikation mit p darstellen.

2.7 Gruppentopologien bestimmt durch einen Filter

Sei X eine Menge und sei eine Funktion $x \mapsto \mathfrak{U}(x)$ als Abbildung von X in die Potenzmenge der Potenzmenge von X gegeben. Betrachte folgende Axiome:

(U1) Für alle $x \in X$ und alle $U \in \mathfrak{U}(x)$ gilt $x \in U$.

(U2) Für alle $x \in X$ und alle $U \in \mathfrak{U}(x)$ existiert $V \in \mathfrak{U}(x)$ mit der Eigenschaft $U \in \mathfrak{U}(v)$ für alle $v \in V$.

Wir gehen in diesem Abschnitt davon aus, dass der Leser folgenden Satz kennt.

Satz 2.22. *Sei X eine Menge, so dass für jedes $x \in X$ ein Filter $\mathfrak{U}(x)$ existiert. Dann sind äquivalent:*

(i) Es gibt eine eindeutige Topologie auf X, bezüglich der $\mathfrak{U}(x)$ mit dem Umgebungsfilter des Punktes x übereinstimmt.

(ii) Für alle $x \in X$ erfüllt der Filter $\mathfrak{U}(x)$ die Eigenschaften (U1) und (U2).

In diesem Fall ist eine Menge $U \subseteq X$ offen bezüglich der definierten Topologie genau dann wenn U Umgebung jedes Punktes $u \in U$ ist.

Beweis. Siehe [Lecture Notes "Introduction to topology", SS 2005, Theorem 1.38]. Dies ist übrigens auch eine schöne Übung. □

Satz 2.23. *Sei G eine Gruppe und sei $\mathfrak{U}$ ein Filter in G mit folgenden Eigenschaften:*

(V1) Für alle $U \in \mathfrak{U}$ existiert $V \in \mathfrak{U}$ mit $VV \subseteq U$.

(V2) Für alle $U \in \mathfrak{U}$ existiert $V \in \mathfrak{U}$ mit $V^{-1} \subseteq U$.

(V3) Für alle $g \in G$ und alle $U \in \mathfrak{U}$ existiert $V \in \mathfrak{U}$ mit der Eigenschaft $gVg^{-1} \subseteq U$.

Dann existiert eine eindeutige Gruppentopologie auf G mit $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}(1)$. Insbesondere erhalten wir für jedes $g \in G$ die Gleichheit $g\mathfrak{U} = \mathfrak{U}g = \mathfrak{U}(g)$.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass die Eins in jedem $U \in \mathfrak{U}$ enthalten sein muss. Sei $U \in \mathfrak{U}$, nach (V1) existiert $V \in \mathfrak{U}$ mit $VV \subseteq U$ und nach (V2) können wir V so wählen, dass $V^{-1} \in \mathfrak{U}$. Da $\mathfrak{U}$ ein Filter ist, folgt $W := V \cap V^{-1} \in \mathfrak{U}$ und somit $W \neq \emptyset$. Sei also $w \in W$, dann gilt:

$$1 = ww^{-1} \in WW^{-1} \subseteq VV \subseteq U.$$

Nun zeigen wir, dass die Filter $\mathfrak{U}(g) := g\mathfrak{U}$ die Eigenschaften (U1) und (U2) aus Satz 2.22 erfüllt. Sei $x \in G$ und $U \in \mathfrak{U}(x)$. Dann ist $x^{-1}U \in \mathfrak{U}$. Es existiert nach (V1) ein $W \in \mathfrak{U}$ mit $WW \subseteq x^{-1}U$. Sei nun $v \in V := xW$. Dann gilt

$$x = x1 \in xW \subseteq x(x^{-1}U) = U,$$

d.h. (U1) ist erfüllt. Schreiben wir zusätzlich $v = xw \in UW$. Daher ist

$$vW = xwW \subseteq x(x^{-1}U) = U,$$

und $U \in \mathfrak{U}(v) = v\mathfrak{U}$ folgt. Die Filter $\mathfrak{U}(g)$ erfüllen somit auch Axiom (U2), und Satz 2.22 liefert uns nun eine eindeutig bestimmte Topologie auf G, deren Umgebungsfilter durch $\mathfrak{U}(g)$ gegeben sind.

Es bleibt zu zeigen, dass G mit dieser Topologie eine topologische Gruppe ist, d.h. dass Multiplikation und Inversion stetig sind.

Zuerst halten wir fest, dass aus (V3)

$$g\mathfrak{U} = \mathfrak{U}g \tag{2.2}$$

folgt. Sei nun $(g, h) \in G \times G$ beliebig. Sei $U \in \mathfrak{U}$, und nach (V1) können wir $V \in \mathfrak{U}$ mit $VV \subseteq U$ wählen. Nach (V3) existiert zusätzlich $W \in \mathfrak{U}$ mit $W \subseteq hVh^{-1}$. Demnach ist

$$(gW)(hV) \subseteq ghVh^{-1}hV \subseteq ghVV \subseteq ghU,$$

und Multiplikation ist stetig im Punkt (g, h). Weiter gilt nach (2.2) die Gleichheit $(g\mathfrak{U})^{-1} = \mathfrak{U}^{-1}g^{-1} = \mathfrak{U}g^{-1} = g^{-1}\mathfrak{U}$, und Inversion ist stetig in g. Also ist G mit der gelieferten Topologie eine topologische Gruppe mit $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}(1)$. $\square$

Korollar 2.24. *Es existiert eine Bijektion zwischen den Mengen der Gruppentopologies auf G und der Mengen der Filter $\mathfrak{U}$, welche die Eigenschaften (V1), (V2) und (V3) erfüllen. Insbesondere ist die Topologie einer topologischen Gruppe bereits eindeutig durch den Umgebungsfilter der Eins festgelegt.* $\square$