Kapitel 1

Einführung

Zunächst möchte ich darauf hinweisen, dass große Teile dieses Skriptes auf dem Vorlesungsskript von Karl Heinrich Hofmann, "Introduction to topological groups", aus dem Wintersemester 2005/2006 basieren. Einige Teile habe ich ergänzt und/oder erweitert, während andere im Wesentlichen noch im (übersetzten) Original vorliegen. Für die Erlaubnis zur Benutzung des Skriptes bin ich jedoch sehr dankbar.

Topologische Gruppen treten an der Schnittstelle zwischen Algebra, genauer gesagt Gruppentheorie, und Topologie auf. Grob gesagt ist eine topologische Gruppe nichts anderes als ein topologischer Raum mit einer Gruppenstruktur, so dass die Gruppenoperation bezüglich der gegebenen Topologie stetig sind. Kanonische Beispiele, welche in allen Gebieten der Mathematik auftreten, sind die Gruppen $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ und $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ der invertierbaren $n \times n$-Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$, sowie die additiven und multiplikativen Gruppen von $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ sowie die Gruppe der komplexen Zahlen mit Absolutbetrag 1, bezeichnet mit $\mathbb{S}^1$.

Wir werden uns zuerst mit der Frage beschäftigen, welche topologischen Räume von ihrer Struktur her eine Chance haben, topologische Gruppen sein zu können. Dies sind die homogenen Räume. Danach werden wir uns den eigentlich Objekten, den topologischen Gruppen, widmen. Der Definition werden einige Beispiele und fundamentale Eigenschaften folgen. Anschließend werden wir uns, wie bereits aus der Einführung in die Algebra bekannt, der Frage nach (abgeschlossenen, normalen) Untergruppen widmen und Faktorgruppen näher beschreiben.

Darauf aufbauend werden wir anschließend zeigen, dass die Topologie einer topologischen Gruppe bereits eindeutig durch den Umgebungsfilter des neutralen Elements, der Eins, festgelegt ist. Zudem zeigen wir, dass in der Kategorie der topologischen Gruppen einige Trennungsaxiome äquivalent sind (was natürlich allgemein bei topologischen Räumen falsch ist). Zum Abschluss dieses Teils wenden wir uns der Zusammenhangskomponente der Eins zu.

Weiterhin werden wir einige Sätze über offene Abbildungen diskutieren. Diese sind im Bereich der topologischen Gruppen erstaunlich stark.

Zu guter Letzt gilt es, eine bestimmte Klasse von topologischen Gruppen genauer zu untersuchen: die lokalkompakten Gruppen. Diese, obgleich Lokalkompaktheit keine sehr starke Eigenschaft ist, haben eine besonders schöne Struktur, das Haar-Maß. Wir werden uns hier also mit der Existenz und Eindeutigkeit eines linksinvarianten Maßes auf lokalkompakten Gruppen beschäftigen.

1.1 Homogene Räume

Sei X ein gegebener topologischer Raum. Wie wir später sehen werden, ist eine notwendige Bedingung an X, um die Struktur einer topologischen Gruppe tragen zu können, dass er homogen ist. Daher schauen wir uns zuerst homogene Räume etwas genauer an.

Definition 1.1. Sei X ein topologischer Raum. Dann heißt X **homogen**, falls es für $x, y \in X$ einen Homöomorphismus $f\colon X \to X$ gibt mit der Eigenschaft $f(x) = y$. □

Beobachtung 1.2. *Sei X ein topologischer Raum und sei G ein Gruppe, welche auf X wirkt. Ferner sei die Wirkungsabbildung $x \mapsto g.x, X \to X$, stetig für alle $g \in G$.*

Wirkt G transitiv, dann ist X homogen.

Beispiel 1.3.

- Die Räume $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ sind homogen.
- Das offene Intervall $(0, \infty) \subseteq \mathbb{R}$ mit der induzierten Topologie ist homogen (Warum?).

Sei $\mathrm{Homeo}(X) := \{f\colon X \to X \mid f \text{ ist ein Homöomorphismus}\}$ die Gruppe aller Homöomorphismen eines topologischen Raumes X. Dann wirkt $\mathrm{Homeo}(X)$ auf dem Raum X durch die Abbildung $(f, x) \mapsto f(x)$.

Proposition 1.4. *Für alle $x \in X$ existiere eine Umgebung $U = U(x)$ sei das Folgende erfüllt: Es existiert für jedes $u \in U$ ein Homöomorphismus $f\colon X \to X$ mit der Eigenschaft $f(x) = u$.*

Dann ist jede Bahn der Homöomorphismengruppe $\mathrm{Homeo}(X)$ *offen. Ist X zusätzlich zusammenhängend, dann ist X homogen.*

Beweis. Sei $x \in \mathrm{Homeo}(x).y$ ein beliebiger Repräsentant einer Bahn und U eine Umgebung von x wie in der Annahme. Sei $u \in U$ beliebig. Dann existiert ein Homöomorphismus $f \in \mathrm{Homeo}(X)$ mit $f(x) = u$. Ebenso existiert per Konstruktion ein $g \in \mathrm{Homeo}(X)$ mit der Eigenschaft $g(y) = x$. Also ist $u = (f \circ g)y \in \mathrm{Homeo}(X).y$, damit ist $\mathrm{Homeo}(X).y$ offen.

Ferner ist $\mathrm{Homeo}(X).y$ das Komplement der Vereinigung aller Bahnen X_i mit $y \notin X_i$. Letzteres ist eine Vereinigung von offenen Mengen, daher ist $\mathrm{Homeo}(X).y$ auch abgeschlossen. Ist X zusammenhängend, gilt daher $\mathrm{Homeo}(X).y = X$ und nach Beobachtung 1.2 ist X homogen. □

Hier ist eine weitere große Klasse von homogenen Räumen.

Definition 1.5. Sei X ein topologischer Raum. Dann heißt X (reelle) **topologische Mannigfaltigkeit**, falls ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, so dass jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung besitzt, welche homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ ist. □

Proposition 1.6. *Eine zusammenhängende Hausdorffsche topologische Mannigfaltigkeit X ist homogen.*

Beweis. Sei $x \in X$ und wähle einen Homöomorphismus $f\colon \mathbb{R}^n \to U$ auf eine offene Umgebung $U \subseteq X$ von x. Sei B der offene Einheitsball im $\mathbb{R}^n$ und $\overline{B}$ der abgeschlossene Einheitsball. Dann ist $f(B)$ offen in $f(\mathbb{R}^n)$ und $f(\overline{B})$ ist kompakt in X. Da X Hausdorffsch ist, muss $f(\overline{B})$ auch abgeschlossen sein. Insbesondere ist $f(\overline{B})$ eine abgeschlossene, kompakte Umgebung von x, welche homöomorph zu einem abgeschlossenen, kompakten, Euklidischen Ball ist. Es ist daher $x \in f(B) \subseteq f(\overline{B})$ mit $f(B)$ offen und $f(\overline{B})$ abgeschlossen. Gleichzeitig existiert für jedes $u \in f(B)$ ein Homöomorphismus g von X mit $g(x) = u$ (warum?).

Die Behauptung folgt nun durch Anwendung von Proposition 1.4. $\square$

Bemerkung 1.7. Die analoge Aussage zu Proposition 1.6 ohne die Annahme "Hausdorff" ist falsch!