Spektraltheorie und Operatoralgebren
12. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Walter Reußwig

SS 2013
5. Juli 2013

Übungen

Aufgabe G54 (Hilbert-Schmidt Operatoren)

Sei $\mathscr{H}$ ein separabler unendlichdimensionaler Hilbertraum mit Orthonormalbasis $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$. Für einen linearen Operator $x : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ setzen wir $\|x\|_{\mathrm{HS}} := \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}} \|xe_n\|^2}$. Gilt $\|x\|_{\mathrm{HS}} < \infty$, so heißt x ein *Hilbert-Schmidt Operator*. Wir bezeichnen mit $\mathrm{HS}(\mathscr{H})$ die Menge aller Hilbert-Schmidt Operatoren auf $\mathscr{H}$. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Ist $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathscr{H}$, so gilt $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|xe_n\|^2 = \sum_{m,n\in\mathbb{N}} |\langle xe_m, f_n\rangle|^2$.

(b) Jeder Hilbert-Schmidt Operator $x \in \mathrm{HS}(\mathscr{H})$ ist stetig und es gilt $\|x\| \leq \|x\|_{\mathrm{HS}}$.

(c) Es gilt genau dann $x \in \mathrm{HS}(\mathscr{H})$, wenn $|x| \in \mathrm{HS}(\mathscr{H})$ gilt. Weiter gilt $\|x\|_{\mathrm{HS}} = \|\,|x|\,\|_{\mathrm{HS}}$.

(d) Ist $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathscr{H}$, so gilt $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|xe_n\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \|xf_n\|^2$. Also ist $\|\cdot\|_{\mathrm{HS}}$ von der gewählten Orthonormalbasis unabhängig.

(e) Die Menge $\mathrm{HS}(\mathscr{H})$ ist ein Untervektorraum von $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ und $\|\cdot\|_{\mathrm{HS}}$ ist eine Norm auf $\mathrm{HS}(\mathscr{H})$.

(f) Für $x \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ und $y \in \mathrm{HS}(\mathscr{H})$ gilt $xy \in \mathrm{HS}(\mathscr{H})$ und $y^* \in \mathrm{HS}(\mathscr{H})$. Damit folgt, dass auch $yx \in \mathrm{HS}(\mathscr{H})$ gilt, also bildet $\mathrm{HS}(\mathscr{H})$ ein Ideal in $\mathscr{B}(\mathscr{H})$. Ferner gilt $\|y\|_{\mathrm{HS}} = \|y^*\|_{\mathrm{HS}}$.

(g) Jeder endliche Rang Operator ist ein Hilbert-Schmidt Operator. Weiter ist der Raum der endlichen Rang Operatoren dicht in $\mathrm{HS}(\mathscr{H})$. Insbesondere gilt $K(\mathscr{H}) = \overline{\mathrm{HS}(\mathscr{H})}^{\|\cdot\|_{\mathrm{op}}}$.

(h) Ein kompakter Operator x mit $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n t_{f_n,e_n}$ ist genau dann ein Hilbert-Schmidt Operator, wenn $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N})$ gilt.

(i) Auf $\mathrm{HS}(\mathscr{H})$ definiert $\langle x, y\rangle_{\mathrm{HS}} := \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle xe_n, ye_n\rangle$ für alle $x, y \in \mathrm{HS}(\mathscr{H})$ ein Skalarprodukt, welches $\|\cdot\|_{\mathrm{HS}}$ induziert. Der Raum $(\mathrm{HS}(\mathscr{H}), \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{HS}})$ ist vollständig, also ein Hilbertraum.

(j) Finden Sie eine abzählbare Orthonormalbasis aus Rang-1 Operatoren für $(\mathrm{HS}(\mathscr{H}), \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{HS}})$.

(k) Bildet $\mathrm{HS}(\mathscr{H})$ mit gewöhnlicher Multiplikation eine Banach*-Algebra?

Aufgabe G55 (Orthonormalbasen in Produkträumen)

Sei (Ω,Σ,μ) ein σ-endlicher Maßraum und $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis für $L^2(\Omega,\Sigma,\mu)$. Wir definieren für $(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ eine Funktion $e_{m,n}:\Omega\times\Omega\to\mathbb{C}$ durch $e_{m,n}(x,y):=e_m(x)\overline{e_n(y)}$ für alle $x,y\in\Omega$. Für den Produktraum schreiben wir $L^2(\mu\otimes\mu):=L^2(\Omega\times\Omega,\Sigma\otimes\Sigma,\mu\otimes\mu)$

(a) Zeigen Sie, dass $e_{m,n}\in L^2(\mu\otimes\mu)$ für alle $(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ gilt. Weiter bildet die Familie $\{e_{m,n}:(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\}$ ein Orthonormalsystem in $L^2(\mu\otimes\mu)$.

(b) Sei $f\in L^2(\mu\otimes\mu)$. Wir definieren eine Funktion f_y durch $f_y(x):=f(x,y)$ für alle $x\in\Omega$ und für $n\in\mathbb{N}$ definieren wir eine Funktion g_n durch $g_n(y):=\langle e_n,f_y\rangle$ für alle $y\in\Omega$. Zeigen Sie, dass $g_n\in L^2(\Omega,\Sigma,\mu)$ für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass $\|g_n\|^2=\sum_{m\in\mathbb{N}}|\langle f,e_{n,m}\rangle|^2$ für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt.

(d) Zeigen Sie, dass $\{e_{m,n}:(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\}$ total in $L^2(\mu\otimes\mu)$ ist.

Ist also $\{e_n:n\in\mathbb{N}\}$ eine Orthonormalbasis von $L^2(\Omega,\Sigma,\mu)$, so definiert $\{e_{m,n}:m,n\in\mathbb{N}\}$ eine Orthonormalbasis in $L^2(\mu\otimes\mu)$ und für alle $f\in L^2(\mu\otimes\mu)$ gilt $\|f\|^2=\sum_{m,n\in\mathbb{N}}|\langle f,e_{m,n}\rangle|^2$.

Aufgabe G56 (Integraloperatoren)

Sei (Ω,Σ,μ) ein σ-endlicher Maßraum und $k:\Omega\times\Omega\to\mathbb{C}$ quadratintegrierbar bezüglich des Produktmaßes $\mu\otimes\mu$. Zeigen Sie, dass der Operator $K:L^2(\Omega,\Sigma,\mu)\to L^2(\Omega,\Sigma,\mu)$ mit

$$(Kf)(x):=\int_\Omega k(x,y)f(y)\,d\mu(y)$$

ein Hilbert-Schmidt Operator ist, welcher $\|K\|_{\mathrm{HS}}=\|k\|_2$ erfüllt.

Aufgabe G57 (Gewichtete Shiftoperatoren)

Für eine beschränkte Folge $\Lambda=(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{C}$ definieren wir einen Oprator $S_\Lambda:l^2(\mathbb{N})\to l^2(\mathbb{N})$ durch $S_\Lambda((x_n)_{n\in\mathbb{N}}):=(\lambda_n x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. Bestimmen Sie die polare Zerlegung von S_Λ. Charakterisieren Sie die Folgen Λ, für welche der Operator S_Λ kompakt ist.

Aufgabe G58 (Darstellungen der Calkin-Algebra)

Sei $\mathscr{H}=l^2(\mathbb{N})$ und $\mathscr{C}(\mathscr{H}):=\mathscr{B}(\mathscr{H})/K(\mathscr{H})$ die Calkin-Algebra.

(a) Zeigen Sie, dass es einen injektiven *-Homomorphismus $\alpha:l^\infty(\mathbb{N})/c_0(\mathbb{N})\to\mathscr{C}(\mathscr{H})$ gibt mit $\alpha(\mathbb{1}+c_0(\mathbb{N}))=\mathbb{1}+K(\mathscr{H})$.

(b) Sei $\{q_n:n\in\mathbb{N}\}$ eine Abzählung von $\mathbb{Q}$. Für jede Zahl $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ wählen wir eine Folge rationaler Zahlen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty}x_n=x$. Wir setzen $X_x:=\{x_n:n\in\mathbb{N}\}$ und wir setzen $N_x:=\{n\in\mathbb{N}:q_n\in X_x\}$. Zeigen Sie, dass die Menge $\mathscr{M}:=\{N_x:x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\}\subseteq\mathscr{P}(\mathbb{N})$ überabzählbar ist und für je zwei Elemente $N_x,N_y\in\mathscr{M}$ der Schnitt $N_x\cap N_y$ endlich ist.

(c) Zeigen Sie, dass es eine überabzählbare Familie paarweiser disjunkter nichttrivialer Projektionen in $\mathscr{C}(\mathscr{H})$ gibt.

(d) Sei $\mathscr{K}$ ein separabler Hilbertraum und $\pi:\mathscr{C}(\mathscr{H})\to\mathscr{B}(\mathscr{K})$ ein *-Homomorphismus. Zeigen Sie, dass $\pi(x)=0$ für alle $x\in\mathscr{C}(\mathscr{H})$ gilt.