Spektraltheorie und Operatoralgebren 11. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Walter Reußwig

SS 2013
28. Juni 2013

Übungen

Aufgabe G49 (Nichtabgeschlossene Ideale)
Sei $\mathscr{A} = \mathscr{C}([-1,1])$ die C*-Algebra der komplexwertigen stetigen Funktionen auf $[-1,1]$ mit Supremumsnorm. Wir betrachten zwei Funktionen $f, g \in \mathscr{A}$, definiert durch $f(t) = t$ für $t \geq 0$ und $f(t) = it$ für $t < 0$ bzw. $g(t) = t$ für alle $t \in [-1,1]$. Mit Hilfe dieser Funktionen definieren wir Teilmengen von $\mathscr{A}$ durch

$$I_f := \{f \cdot h : \ h \in \mathscr{A}\} \qquad\qquad I_g := \{g \cdot h : \ h \in \mathscr{A}\}.$$

Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) I_f und I_g definieren nicht-abgeschlossene Ideale in $\mathscr{A}$.

(b) Es gilt $f^* \notin I_f$, also ist I_f kein selbstadjungiertes Ideal von $\mathscr{A}$.

(c) Es gibt keine Funktionen $g_+, g_- \in I_g$ mit $g_+ \geq 0, g_- \geq 0$ und $g = g_+ - g_-$. Das Ideal I_g ist also nicht von positiven Elementen erzeugt.

Aufgabe G50 (Matrixeinheiten)
Sei $\mathscr{A}$ eine C*-Algebra mit Eins und sei $d > 1$. Eine Familie $\{E_{ij} : 1 \leq i, j \leq d\} \subseteq \mathscr{A}$ heißt ein endliches System von *Matrixeinheiten*, wenn folgende algebraischen Relationen gelten:

$$E_{ij} \cdot E_{kl} = \begin{cases} E_{il}, & j = k, \\ 0, & j \neq k, \end{cases} \qquad\qquad E_{ij}^* = E_{ji}, \qquad\qquad \sum_{i=1}^{d} E_{ii} = \mathbb{1}.$$

Offensichtlich besteht ein System von Matrixeinheiten aus partiellen Isometrien und für jedes $1 \leq i \leq d$ ist E_{ii} eine orthogonale Projektion. Zeigen Sie, dass die von den Matrixeinheiten erzeugte C*-Algebra $\mathscr{B}$ zu M_d isometrisch isomorph ist.

Aufgabe G51 (Eine konkrete polare Zerlegung)
Sei $\mathscr{H} = \mathbb{C}^3$. Bestimmen Sie die polare Zerlegung des Operators $x = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$.

Aufgabe G52 (Über polare Zerlegung in C*-Algebren)
Sei $\mathscr{A}$ eine C*-Algebra mit Eins.

(a) Sei $x \in \mathscr{A}$, so dass x^*x invertierbar ist. Zeigen Sie, dass x eine polare Zerlegung in $\mathscr{A}$ besitzt: Es gibt eine Isometrie $u \in \mathscr{A}$ mit $x = u \cdot |x|$.

(b) Sei $x \in \mathscr{A}$, so dass 0 ein isolierter Punkt des Spektrums $\sigma(x^*x)$ ist. Zeigen Sie, dass es eine eindeutig bestimmte kleinste Projektion $p \in \mathscr{A}$ mit $xp = x$ und eine eindeutig bestimmte partielle Isometrie $u \in \mathscr{A}$ mit $x = u \cdot |x|$ und $u^*u = p$ gibt.

(c) Sei $\mathscr{C} = \widetilde{\mathscr{C}_0}(\mathbb{R})$ und sei $f(t) = \frac{e^{it}}{1+t^2}$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass für alle $u \in \mathscr{C}$ die Ungleichung $f \neq u|f|$ gilt.

Aufgabe G53 (Approximierende Eins in separablen C*-Algebren)
Sei $\mathscr{A}$ eine separable C*-Algebra. Zeigen Sie, dass eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{A}$ existiert mit $\lim_{n\to\infty} u_n x = x$ und $\lim_{n\to\infty} x u_n = x$ für alle $x \in \mathscr{A}$.

Hinweis: Wählen Sie eine abzählbare dichte Teilmenge $\{v_n : n \in \mathbb{N}\}$ in der Menge aller positiver Elemente der Einheitskugel von $\mathscr{A}$ und wählen Sie eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_{n+1} \geq v_k$ für alle $1 \leq k \leq n$. Gehen Sie nun die Argumentation des Existenzbeweises einer approximierenden Eins aus der Vorlesung durch.