Spektraltheorie
und Operatoralgebren
10. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Walter Reußwig

SS 2013
21. Juni 2013

Übungen

Aufgabe G45 (Über Stop-Stetigkeit der Multiplikation auf $\mathscr{B}(\mathscr{H})$)

Sei $\mathscr{H} = l^2(\mathbb{N})$ und $s : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ der (isometrische) einseitige Shift. Sei weiter $\mathscr{U} := \{U \subseteq \mathscr{H} : U$ ist in der starken Operatortopologie eine Nullumgebung$\}$. Wir definieren nun eine Indexmenge I. Wir setzen $I := \{(m, U) : m \in \mathbb{N}, U \in \mathscr{U}\}$ und setzen

$$(m_1, U_1) \leq (m_2, U_2) :\Longleftrightarrow m_1 \leq m_2 \text{ und } U_2 \subseteq U_1.$$

Um ein Tupel (m, U) zu vergrößern ist also entweder die Zahl m zu vergrößern oder die Nullumgebung U zu verfeinern.

(a) Zeigen Sie, dass $(I, \leq)$ eine partiell geordnete Menge ist. Zeigen Sie weiter, dass diese *nach oben gerichtet* ist, also für alle $i, j \in I$ ein $k \in I$ existiert mit $i \leq k$ und $j \leq k$.

(b) Sei $i = (m_i, U_i) \in I$. Zeigen Sie, dass $\text{stop-lim}_{n\to\infty} m_i \cdot (s^*)^n = 0$ gilt. Insbesondere existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $m_i \cdot (s^*)^n \in U_i$.

(c) Sei $i = (m_i, U_i) \in I$. Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $m_i \cdot (s^*)^n \in U_i$, definiere $x_i := m_i \cdot (s^*)^n$ und definiere $y_i := \frac{1}{m_i} s^n$. Damit bilden $(x_i)_{i\in I}$ und $(y_i)_{i\in I}$ Netze in $\mathscr{B}(\mathscr{H})$. Zeigen Sie $\text{stop-lim}_{i\in I} x_i = 0$ und $\|\cdot\| - \lim_{i\in I} y_i = 0$.

(d) Bestimmen Sie $\text{stop-lim}_{i\in I} x_i \cdot y_i$. Ist damit die Multiplikation $\mathscr{B}(\mathscr{H}) \times \mathscr{B}(\mathscr{H})_1 \to \mathscr{B}(\mathscr{H})$ stop-stetig?

Aufgabe G46 (Die Cuntz-Algebra I)

Sei $\mathscr{H}$ ein Hilbertraum, sei $d > 1$ eine natürliche Zahl und seien $s_1, \ldots, s_d \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ Isometrien mit $\sum_{k=1}^d s_k s_k^* = \mathbb{1}$. Wir definieren $\mathscr{O}_d := C^*(s_1, \ldots, s_d)$. Konstruieren Sie auf einem Hilbertraum Ihrer Wahl (zum Beispiel $\mathscr{H} = L^2([0, d], \lambda)$) eine konkrete Realisierung von $\mathscr{O}_d \subseteq \mathscr{B}(\mathscr{H})$.

Aufgabe G47 (Abgeschlossene Ideale in $\mathscr{B}(\mathscr{H})$)

Sei $\mathscr{H} = l^2(\mathbb{N})$ mit kanonischer Orthonormalbasis $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$. Wir betrachten die im 6. Übungsblatt definierte C*-Algebra $K(\mathscr{H})$. Diese war definiert als die durch $\{E_{ij} : i, j \in \mathbb{N}\}$ erzeugte C*-Unteralgebra von $\mathscr{B}(\mathscr{H})$, wobei $E_{ij}(\xi) = \xi_j \cdot e_i$ für alle $\xi \in \mathscr{H}$ gelte.

Wir haben bereits gesehen, dass $K(\mathscr{H})$ ein abgeschlossenes Ideal von $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ bildet. Weiter enthält $K(\mathscr{H})$ alle Operatoren endlichen Rangs.

(a) Konstruieren Sie für $K(\mathscr{H})$ eine approximierende Eins.

(b) Sei I ein von $\{0\}$ verschiedenes abgeschlossenes Ideal in $\mathscr{B}(\mathscr{H})$. Zeigen Sie, dass $K(\mathscr{H}) \subseteq I$ gilt.

(c) Seien $\mathscr{K}, \mathscr{L} \subseteq \mathscr{H}$ unendlichdimensionale abgeschlossene Teilräume von $\mathscr{H}$. Konstruieren Sie eine partielle Isometrie $s : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ mit $s^*s = p_{\mathscr{K}}$ und $ss^* = p_{\mathscr{L}}$.

(d) Folgern Sie, dass ein abgeschlossenes Ideal I in $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ genau dann eine Projektion auf einen unendlichdimensionalen Teilraum enthält, wenn I alle solchen Projektionen enthält und damit mit $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ übereinstimmt.

(e) Zeigen Sie, dass die C*-Algebra $\mathscr{C}(\mathscr{H}) := \mathscr{B}(\mathscr{H})/K(\mathscr{H})$ einfach ist. Diese Algebra heißt auch *Calkin-Algebra*.

Aufgabe G48 (Spektrale Charakterisierungen)

Sei $\mathscr{H}$ ein Hilbertraum und $p, x \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Gilt $p = p^*$ und $\sigma(p) \subseteq \{0, 1\}$, so ist p eine orthogonale Projektion.

(b) Sei $\lambda \in \sigma_p(x)$. Dann ist

  (i) $\overline{\lambda} \in \sigma_p(x^*)$ genau dann, wenn $(x - \lambda \mathbb{1})$ kein dichtes Bild besitzt.

  (ii) $\overline{\lambda} \in \sigma_r(x^*)$ genau dann, wenn $(x - \lambda \mathbb{1})$ dichtes Bild besitzt.

(c) Es gilt $\lambda \in \sigma_c(x)$ genau dann, wenn $\overline{\lambda} \in \sigma_c(x^*)$ gilt.