Spektraltheorie und Operatoralgebren
9. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Walter Reußwig

SS 2013
14. Juni 2013

Übungen

Aufgabe G41 (Matrizen und Spektralmaße)
Sei $T \in M_d$ selbstadjungiert. Wir interpretieren T als beschränkten linearen Operator auf $\mathscr{H} = \mathbb{C}^d$. Sei $\xi \in \mathscr{H}$ ein Einheitsvektor und für jedes $\lambda \in \sigma(T)$ sei P_λ die zugehörige Spektralprojektion auf den Eigenraum zu λ. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $\mu_\xi : \sigma(T) \ni \lambda \mapsto \langle P_\lambda \xi, \xi \rangle$ definiert ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\sigma(T)$.

(b) Die Abbildung $\sigma(T) \ni \lambda \mapsto P_\lambda$ definiert ein projektionswertiges Wahrscheinlichkeitsmaß und $t \mapsto E_t := \chi_{]-\infty,t]}(T)$ eine projektionswertige Verteilungsfunktion dieses Maßes (was könnte das heißen?).

(c) Das Wahrscheinlichkeitsmaß μ_ξ ist genau dann auf $\sigma(T)$ treu, wenn der Vektor ξ separierend für die von T erzeugte C*-Algebra $\mathscr{A}(T)$ ist, also aus $S \in \mathscr{A}(T)$ mit $S(\xi) = 0$ bereits $S = 0$ folgt. Hierbei bedeutet *treu*, dass $\mu_\xi(\{\lambda\}) > 0$ für alle $\lambda \in \sigma(T)$ gilt.

(d) Der Operator T besitzt genau dann einen zyklischen Vektor $\eta \in \mathscr{H}$, wenn jeder Eigenwert von T einfach und von Null verschieden ist.

Aufgabe G42 (Der Shiftoperator und Spektralmaße)
Sei S der Rechtsshift auf $\mathscr{H} = l^2(\mathbb{Z})$ und $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ die kanonische Orthonormalbasis von $\mathscr{H}$. Sei $\xi = e_0$ und $\eta = e_{-1} + e_1$.

(a) Ist ξ oder η ein zyklischer Vektor für S? Berechnen Sie das Spektralmaß μ_ξ und μ_η auf dem Spektrum von S.

(b) Berechnen Sie das Spektralmaß μ_ξ für den Operator $S + S^*$. Besitzt $S + S^*$ einen zyklischen Vektor in $\mathscr{H}$?

Aufgabe G43 (Stop-stetige Funktionale auf $\mathscr{B}(\mathscr{H})$)
Sei $\mathscr{H}$ ein Hilbertraum und φ ein Funktional auf $\mathscr{B}(\mathscr{H})$, welches stetig bezüglich der starken Operatortopologie sei. Wir wollen die Menge aller solchen stetigen Funktionale in dieser Aufgabe klassifizieren.

Schritt 1: Sei $(E,\mathscr{P})$ ein lokalkonvexer Vektorraum. Wir erinnern daran, dass in jeder Nullumgebung U der durch $\mathscr{P}$ erzeugten Topologie eine Menge der Form $U_{p_1,\dots,p_n,\varepsilon} := \{x \in E : p_k(x) < \varepsilon,\ 1 \le k \le n\}$ enthalten ist. Machen Sie sich klar: Ist $\varphi : E \to \mathscr{C}$ stetig, so existieren endlich viele Halbnormen $p_1,\dots,p_n \in \mathscr{P}$ und eine Zahl $C > 0$ mit $|\varphi(x)| \le \max C \cdot \{p_k(x) : 1 \le k \le n\}$ für alle $x \in E$.

Schritt 2: Sei $\mathscr{H}$ ein Hilbertraum und sei $\tilde{\mathscr{H}} := \bigoplus_{k=1}^n \mathscr{H} = \mathscr{H} \oplus \mathscr{H} \oplus \dots \oplus \mathscr{H}$. Für einen Operator $x \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ und jedes $\tilde{\xi} = \xi_1 \oplus \dots \oplus \xi_n$ definieren wir $\tilde{x}\tilde{\xi} := (x\xi_1) \oplus (x\xi_2) \oplus \dots \oplus (x\xi_n)$. Zeigen Sie, dass der Operator $\tilde{x}$ stetig auf $\tilde{\mathscr{H}}$ ist und $\|\tilde{x}\tilde{\xi}\| \le \|x\|\|\tilde{\xi}\| \le \sqrt{n}\|x\| \max\{\|\xi_k\| : 1 \le k \le n\}$ gilt.

Schritt 3: Sei $\tilde{\xi} \in \tilde{\mathscr{H}}$ ein Vektor. Setze $\mathscr{K} := \mathrm{LH}\{\tilde{x}\tilde{\xi} : x \in \mathscr{B}(\mathscr{H})\}$. Zeigen Sie: Ist ψ ein Funktional auf $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ mit $|\psi(x)| \le \|\tilde{x}\xi\|$, so ist $\mathscr{K} \ni \tilde{x}\tilde{\xi} \mapsto \psi(x)$ stetig und es existiert ein $\tilde{\eta} \in \tilde{\mathscr{H}}$ mit

$$\psi(x) = \langle \tilde{x}\tilde{\xi}, \tilde{\eta} \rangle = \sum_{k=1}^n \langle x\xi_k, \eta_k \rangle.$$

Sei $\mathscr{H}$ ein Hilbertraum und φ ein Funktional auf $\mathscr{B}(\mathscr{H})$. Zeigen Sie, dass foldende Aussagen äquivalent sind:

(a) Das Funktional φ ist swop-stetig.

(b) Das Funktional φ ist stop-stetig.

(c) Es existiert $n \in \mathbb{N}$ und Vektoren $\xi_1, \dots \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_n \in \mathscr{H}$ mit

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^n \langle x\xi_k, \eta_k \rangle.$$

Zeigen Sie weiter, dass es ein für die Normtopologie stetiges lineares Funktional auf $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ gibt, welches nicht stop-stetig ist.

Aufgabe G44 (Mehr über induktive Limes C*-Algebren III)
Eine C*-Algebra $\mathscr{B}$ heißt *einfach*, wenn $\mathscr{B}$ nur triviale zweiseitige abgeschlossene Ideale besitzt. Damit ist also $\mathscr{B}$ genau dann einfach, wenn jeder nichttriviale *-Homomorphismus $\beta : \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ in eine C*-Algebra $\mathscr{C}$ injektiv ist.

Sei $(\mathscr{A}_n, \iota_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein induktives System von unitalen C*-Algebren mit induktivem Limes $\mathscr{A}$. Zeigen Sie, dass $\mathscr{A}$ einfach ist, wenn für jedes $n \in \mathbb{N}$ der Homomorphismus ι_n unital ist und die C*-Algebra $\mathscr{A}_n$ einfach ist.