Spektraltheorie und Operatoralgebren 8. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Walter Reußwig

SS 2013
7. Juni 2013

Heute Mathe, morgen ???

Zwei Mathematikerinnen erzählen.

Vortragsreihe für Studierende der Mathematik

jeweils Mittwoch, ab **14 Uhr** in **S1|03 223**

5. Juni	*Rike Betten*	Gestern Mathe, dann **Consultant**, heute **EnBW**
19. Juni	*Prof. Dr. Hannah Markwig*	Gestern Mathe, heute … **Mathe**

Übungen

Aufgabe G35 (Direkte Summen von C*-Algebren)
Für C*-Algebren $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ definieren wir die *direkte Summe* als die Menge aller Paare

$$\mathscr{A} \oplus \mathscr{B} := \{a \oplus b : a \in \mathscr{A},\ b \in \mathscr{B}\}$$

mit komponentenweiser Addition, Multiplikation, Adjunktion und Maximumsnorm:

$$\begin{aligned} a_1 \oplus b_1 + a_2 \oplus b_2 &:= (a_1 + a_2) \oplus (b_1 + b_2), \\ a_1 \oplus b_1 \cdot a_2 \oplus b_2 &:= (a_1 \cdot a_2) \oplus (b_1 \cdot b_2), \\ (a \oplus b)^* &:= a^* \oplus b^*, \\ \|a \oplus b\| &:= \max\{\|a\|, \|b\|\}. \end{aligned}$$

Zur Vereinfachung schreiben wir auch bei Bedarf $(a, b) := a \oplus b$, wie Sie es vielleicht aus der linearen Algebra gewohnt sind.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathscr{A} \oplus \mathscr{B}$ wieder eine C*-Algebra ist.

(b) Wir betrachten die C*-Algebra $\mathscr{C} := M_2 \oplus M_2$. Finden Sie eine geeignete C*-Unteralgebra von M_4, die zu $\mathscr{C}$ isomorph ist.

(c) Für C*-Algebren $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \dots, \mathscr{A}_n, \mathscr{A}_{n+1}$ definieren wir iterativ

$$\bigoplus_{k=1}^{1} \mathscr{A}_k := \mathscr{A}_1 \qquad \bigoplus_{k=1}^{n+1} \mathscr{A}_k := \left(\bigoplus_{k=1}^{n} \mathscr{A}_k \right) \oplus \mathscr{A}_{n+1}.$$

Identifizieren Sie die C*-Algebra $\bigoplus_{k=1}^{n} \mathbb{C}$ möglichst konkret mit einer bekannten C*-Algebra.

Aufgabe G36 (Starke Operatorkonvergenz I)
Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit $0 \leq x \leq \mathbb{1}$. Zeigen Sie, dass die Folge $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ in der starken Operatortoplogie gegen eine orthogonale Projektion p konvergiert. Charakterisieren Sie p mit Hilfe des Spektrums von x. Wann konvergiert die Folge in der Norm gegen p?

Aufgabe G37 (Starke Operatorkonvergenz II)
Sei $\mathcal{H} = L^2(\Omega, \Sigma, \mu)$ und sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gleichmäßig beschränkte Folge messbarer Funktionen auf (Ω, Σ, μ), die punktweise μ-fast überall gegen eine Funktion f konvergieren. Zeigen Sie, dass die Folge der Multiplikationsoperatoren $M_{f_n} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit $M_{f_n}(g) := f_n \cdot g$ in der starken Operatortoplogie gegen M_f konvergiert.

Aufgabe G38 (Schwache Operatorkonvergenz auf beschränkten Mengen)
Seien $\mathcal{H}$ und $\mathcal{K}$ Hilbertraume, weiter sei $\mathcal{H}_0$ eine in $\mathcal{H}$ totale Teilmenge und $\mathcal{K}_0$ eine in $\mathcal{K}$ totale Teilmenge. Sei $(x_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ ein beschränktes Netz und $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) Für alle $\xi_0 \in \mathcal{H}_0$ und $\eta_0 \in \mathcal{K}_0$ gilt $\lim_{i\in I}\langle (x_i - x)\xi_0, \eta_0\rangle = 0$.

(ii) Für alle $\xi \in \mathcal{H}$ und $\eta \in \mathcal{K}$ gilt $\lim_{i\in I}\langle (x_i - x)\xi, \eta\rangle = 0$.

(iii) Es gilt $\text{swop-}\lim_{i\in I} x_i = x$.

Hinweis: Für die Abhängigkeit von $\eta \in \mathcal{K}_0$ bzw. $\mathcal{K}$ betrachten Sie die Operatoren in $\mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathbb{C})$ gegeben durch $\varphi_i^{\xi_0} : \mathcal{K} \ni \eta \mapsto \langle x_i\xi_0, \eta\rangle$ und $\varphi^{\xi_0} : \mathcal{K} \ni \eta \mapsto \langle x\xi_0, \eta\rangle$ und verwenden Sie 6.4 aus der Vorlesung.

Aufgabe G39 (Über Stetigkeit der Multiplikation in der starken bzw. schwachen Operatortoplogie)
Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Zeigen sie folgende Aussagen:

(a) Für jedes $a \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ sind $L_a : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \ni x \mapsto ax \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ und $R_a : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \ni x \mapsto xa \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ stop-stetig und swop-stetig.

(b) Die Adjunktion ist nicht stop-stetig, aber swop-stetig.

(c) Ist die Multiplikation $\mathcal{B}(\mathcal{H})_1 \times \mathcal{B}(\mathcal{H})_1 \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ swop-stetig?

(d) Sei $(x_i)_{i\in I}$ ein beschränktes gegen x stop-konvergentes Netz und sei $(y_i)_{i\in I}$ ein gegen y stop-konvergentes Netz. Dann gilt $\text{stop-}\lim_{i\in I} x_i y_i = xy$. Insbesondere ist die Multiplikation eingeschränkt auf $\mathcal{B}(\mathcal{H})_1 \times \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ stop-stetig.

Bemerkung: Um zu sehen, dass die Multiplikation $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \times \mathcal{B}(\mathcal{H})_1 \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ nicht stop-stetig ist, verweisen wir auf das Buch von Murphy, C*-Algebras and Operator Theory, 1990, Aufgabe 4.3.

Aufgabe G40 (Mehr über induktive Limes C*-Algebren II)
Bestimmen Sie den induktiven Limes folgender induktiver Systeme $(\mathcal{A}_n, \iota_n)_{n\in\mathbb{N}}$ möglichst konkret, wobei $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von C*-Algebren sei und für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Abbildung $\iota_n : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}_{n+1}$ ein (nicht notwendigerweise einserhaltender) *-Homomorphismus sei:

(a) $\mathcal{A}_n = M_d \oplus M_d, \quad \iota_n(x \oplus y) := 0 \oplus x.$

(b) $\mathcal{A}_n = \mathcal{C}_b(\mathbb{R}), \quad \iota_n(f) := f \circ \arctan.$

(c) $\mathcal{A}_n = \left(\bigoplus_{k=1}^n M_d\right), \quad \iota_n(x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n) := x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n \oplus 0.$