Spektraltheorie und Operatoralgebren 7. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Walter Reußwig

SS 2013
31. Mai 2013

Übungen

Aufgabe G32 (Die Gruppe unitärer Elemente einer C*-Algebra mit Eins)

Sei $\mathscr{A}$ eine C*-Algebra mit Eins. Wir definieren $\mathscr{U}(\mathscr{A}) := \{u \in \mathscr{A} : u^*u = \mathbb{1} = uu^*\}$. Es ist klar, dass $\mathscr{U}(\mathscr{A})$ eine Gruppe definiert. Weiter erklären wir folgende Relation auf $\mathscr{U}(\mathscr{A})$: Wir nennen $u, v \in \mathscr{U}(\mathscr{A})$ *homotop*, wenn es einen stetigen Weg $\gamma : [0,1] \to \mathscr{U}(\mathscr{A})$ mit $\gamma(0) = u$ und $\gamma(1) = v$ gibt. Sind u und v homotop, so schreiben wir $u \sim v$. Die Menge aller zu $\mathbb{1}$ homotopen Elemente bezeichnen wir mit $\mathscr{U}_0(\mathscr{A})$.

(a) Zeigen Sie, dass die Multiplikation $\mathscr{U}(\mathscr{A}) \times \mathscr{U}(\mathscr{A}) \ni (u,v) \mapsto u \cdot v \in \mathscr{U}(\mathscr{A})$ stetig ist. Zeigen Sie, dass ebenso die Inversion $\mathscr{U}(\mathscr{A}) \ni u \mapsto u^{-1} \in \mathscr{U}(\mathscr{A})$ stetig ist. Damit bildet $\mathscr{U}(\mathscr{A})$ also eine toplogische Gruppe.

(b) Zeigen Sie, dass die Relation $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

(c) Sei $a \in \mathscr{A}_h$ beliebig. Zeigen Sie, dass $u := \exp(ia)$ unitär ist und $u \in \mathscr{U}_0(\mathscr{A})$ gilt.

(d) Zeigen Sie mit Hilfe des Spektralsatzes, dass aus $\|u - \mathbb{1}\| < 2$ für $u \in \mathscr{U}(\mathscr{A})$ folgt, dass ein $a \in \mathscr{A}_h$ existiert mit $u = \exp(ia)$.

(e) Zeigen Sie, dass für $u, v \in \mathscr{U}(\mathscr{A})$ aus $\|u - v\| < 2$ die Abschätzung $\|v^*u - \mathbb{1}\| < 2$ folgt. Folgern Sie insbesondere $u \sim v$.

(f) Zeigen Sie, dass $U_0(\mathscr{A})$ offen und abgeschlossen in $\mathscr{U}(\mathscr{A})$ und zusammenhängend ist.

(g) Sei $V := \{\exp(ia_1) \cdot \exp(ia_2) \cdot \ldots \cdot \exp(ia_n) : n \in \mathbb{N}, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathscr{A}_h\}$. Zeigen Sie, dass V offen und abgeschlossen in $\mathscr{U}_0(\mathscr{A})$ ist. Folgern Sie $V = \mathscr{U}_0(\mathscr{A})$.

(h) Bestimmen Sie $\mathscr{U}_0(M_n)$ für die C*-Algebra der komplexen $n \times n$-Matrizen.

(i) Sei $\mathscr{A} = \mathscr{C}(\mathbb{T})$. Zeigen Sie, dass das Element $f \in \mathscr{A}$ mit $f(z) = z$ nicht in $\mathscr{U}_0(\mathscr{A})$ liegt.

(j) Finden Sie ein Beispiel für eine C*-Algebra $\mathscr{A}$, so dass ein unitäres Element $u \in \mathscr{U}(\mathscr{A})$ existiert mit $\sigma(u) = \mathbb{T}$ und $u \sim \mathbb{1}$.

Wenn Sie möchten: Zeigen Sie, dass $\mathscr{U}_0(\mathscr{A})$ eine normale Untergruppe von $\mathscr{U}(\mathscr{A})$ ist.

Aufgabe G33 (Approximationen von Projektionen)

Sei $\mathscr{A}$ eine unitale C*-Algebra, sei $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{4}$ und sei $a \in \mathscr{A}$ ein positives Element mit $0 \leq a \leq \mathbb{1}$ und $\|a^2 - a\| < \varepsilon$.

(a) Zeigen Sie, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass für das Spektrum von a gilt:

$$\sigma(a) \subseteq \left[0, \frac{1}{2} - \delta\right] \cup \left[\frac{1}{2} + \delta, 1\right].$$

(b) Zeigen Sie: Es gibt eine stetige Funktion $f : [0,1] \to [0,1]$ mit $\|f\|_\infty = 1$ und $f(\lambda) \in \{0,1\}$ für alle $\lambda \in \sigma(a)$.

(c) Zeigen Sie: Das Element $p := f(a)$ definiert eine Projektion und es gilt $\|p - a\| \leq C \cdot \varepsilon$ für eine geeignete Konstante $C > 0$.

Hinweis: Für $\delta = \frac{1}{2}\sqrt{1 - 4\varepsilon}$ ergibt sich $C = 2$.

Aufgabe G34 (Mehr über induktive Limes C*-Algebren I)

Sei $(\mathscr{A}_n, \iota_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein induktives System von unitalen C*-Algebren mit induktivem Limes $\mathscr{A}$. Wir bezeichnen mit $\varphi_n : \mathscr{A}_n \to \mathscr{A}$ die kanonischen *-Homomorphismen. Sei $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Ist $x \in \mathscr{A}$ selbstadjungiert, so existiert ein $n \in \mathbb{N}$ und ein selbstadjungiertes Element $x_n \in \mathscr{A}_n$ mit $\|x - \varphi_n(x_n)\| \leq \varepsilon$.

(b) Ist $x \in \mathscr{A}$ mit $0 \leq x \leq \mathbb{1}$, so existiert ein $n \in \mathbb{N}$ und ein Element $x_n \in \mathscr{A}_n$ mit $0 \leq x_n \leq \mathbb{1}$ und $\|x - \varphi_n(x_n)\| \leq \varepsilon$.
Hinweis: Betrachten Sie die stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(t) = 0$ für $x < 0$, $f(t) = t$ für $0 \leq t \leq 1$ und $f(t) = 1$ für $t > 1$.

(c) Ist $p \in \mathscr{A}$ eine Projektion, so existiert ein $n \in \mathbb{N}$ und es existiert eine Projektion $p_n \in \mathscr{A}_n$ mit $\|p - \varphi_n(p_n)\| \leq \varepsilon$.

Eine mögliche Strategie:

- Starten Sie mit einem Element $y \in \mathscr{A}_n$ und $\|p - \varphi_n(y)\| \leq \frac{\varepsilon}{12}$.
- Zeigen Sie $\|\varphi_n(y^2 - y)\| \leq \frac{\varepsilon}{4}$.
- Finden Sie ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für $z := \iota_N \circ \ldots \circ \iota_n(y)$ gilt: $\|z^2 - z\| \leq \frac{\varepsilon}{4}$.
- Wenden Sie die Aussage aus Aufgabe 33 in der C*-Algebra $\mathscr{A}_N$ an.
- Zeigen Sie, dass die so gefundene Projektion p_N die Abschätzung $\|p - p_N\| \leq \varepsilon$ erfüllt.