Spektraltheorie und Operatoralgebren
6. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Walter Reußwig

SS 2013
24. Mai 2013

Übungen

Aufgabe G28 (*-Algebren, C*-Seminormen und Vervollständigung)

(a) Sei $\mathscr{A}$ eine *-Algebra und p eine submultiplikative Halbnorm auf $\mathscr{A}$ mit $p(x)^2 = p(x^*x)$ für alle $x \in \mathscr{A}$. Zeigen Sie, dass $\mathscr{A}_0 := \{x \in \mathscr{A} : p(x) = 0\}$ ein *-Ideal in $\mathscr{A}$ bildet und die Quotientennorm $\|x\| := \inf_{y \in (x + \mathscr{A}_0)} p(y)$ auf $\mathscr{A}/\mathscr{A}_0$ die C*-Eigenschaft $\|x^*x\| = \|x\|^2$ erfüllt.

(b) Sei $\mathscr{A}$ eine *-Algebra und $\|\cdot\|$ eine submultiplikative Norm auf $\mathscr{A}$ mit $\|x^*x\| = \|x\|^2$. Zeigen Sie, dass die Vervollständigung $\mathscr{A}^-$ von $\mathscr{A}$ eine eindeutige C*-Algebrenstruktur trägt: Es gibt eine eindeutige Fortsetzung der Multiplikation auf $\mathscr{A}$ zu einer auf $\mathscr{A}^-$ und die fortgesetzte Norm auf $\mathscr{A}^-$ ist eine C*-Norm.

Aufgabe G29 (Die C*-Algebra $K(\mathscr{H})$)

Sei $\mathscr{H} = l^2(\mathbb{N})$ mit kanonischer Orthonormalbasis $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ der Hilbertraum aller komplexen quadratsummierbaren Folgen. Die Menge aller beschränkten linearen Operatoren auf $\mathscr{H}$ bezeichnen wir mit $\mathscr{B}(\mathscr{H})$. Aus der Vorlesung zur Funktionalanalysis ist bekannt, dass $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ mit Operatornorm und gewöhnlicher Adjunktion eine C*-Algebra bildet. Weiter wissen wir bereits: Ein Element von $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ ist genau dann selbstadjungiert, positiv, unitär, partiell isometrisch etc. im Sinne der Hilbertraumdefinitionen, wenn es im Sinne der Definitionen aus Kapitel 5 dieser Vorlesung selbstadjungiert, positiv, unitär, partiell isometrisch etc. ist. Wir betrachten die *Matrixeinheiten* zu obiger Orthonormalbasis $E_{i,j} : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$:

$$E_{ij}\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot e_k\right) := \sum_{k=1}^{\infty} \langle x_k \cdot e_k, e_j \rangle \cdot e_i = x_j \cdot e_i$$

und wir betrachten folgende Teilräume von $\mathscr{B}(\mathscr{H})$: Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $\mathscr{A}_n := \mathrm{LH}\{E_{ij} : 1 \le i, j \le n\}$.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge $\mathscr{A}_n$ eine C*-Unteralgebra von $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ bildet, die zu M_n isomorph ist. Weiter gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Inklusion $\mathscr{A}_n \subseteq \mathscr{A}_{n+1}$.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathscr{A} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{A}_n$ eine Algebra definiert, die unter Adjunktion abgeschlossen ist. Damit ist $K(\mathscr{H}) := \overline{\mathscr{A}}$ eine C*-Unteralgebra von $\mathscr{B}(\mathscr{H})$.

(c) Ein Operator $x \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ heißt *endlicher Rang Operator*, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ und Vektoren $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathscr{H}$ und $\eta_1, \dots, \eta_n \in \mathscr{H}$ gibt mit $x(\zeta) = \sum_{k=1}^{n} \langle \zeta, \xi_k \rangle \eta_k$. Zeigen Sie, dass jeder endliche Rang Operator ein Element von $K(\mathscr{H})$ ist.

(d) Liegen bereits alle endlichen Rang Operatoren in $\mathscr{A}$? Liefert die gleiche Konstruktion zu einer anderen Orthonormalbasis von $\mathscr{H}$ dieselbe C*-Algebra $K(\mathscr{H})$?

(e) Zeigen Sie, dass $\mathbb{1} \notin \mathscr{A}$ gilt und zeigen Sie, dass $K(\mathscr{H})$ ein Ideal in $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ bildet.

(f) Es sei $\widetilde{K(\mathscr{H})}$ die C*-Algebra, welche durch $K(\mathscr{H})$ und $\mathbb{1}$ in $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ erzeugt wird. Diese ist isomorph zur C*-Algebra, die durch Adjunktion einer Eins zu $K(\mathscr{H})$ entsteht. Zeigen Sie, dass $\widetilde{K(\mathscr{H})}$ nicht mit $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ übereinstimmt.

Aufgabe G30 (Der Induktive Limes von C*-Algebren)
Sei $(\mathscr{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von C*-Algebren. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $\iota_n : \mathscr{A}_n \to \mathscr{A}_{n+1}$ ein *-Homomorphismus.

Wir definieren $\mathscr{F} := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist Folge mit } x_n \in \mathscr{A}_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$.

(a) Zeigen Sie/Machen Sie sich klar, dass $\mathscr{F}$ mit komponentenweiser Addition, Multiplikation und Adjunktion eine *-Algebra definiert (Normieren wollen/können wir diese nicht).

Wir betrachten den Teilraum $\mathscr{B} := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{F} : \text{Es gibt ein } m \in \mathbb{N} \text{ mit } x_{n+1} = \iota_n(x_n) \text{ für alle } n \geq m\}$.

(b) Zeigen Sie: Die Menge $\mathscr{B}$ ist eine *-Unteralgebra von $\mathscr{F}$. Die Vorschrift $|||x||| := \lim_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|$ definiert eine submultiplikative Halbnorm auf $\mathscr{B}$, welche die C*-Eigenschaft besitzt.

Wir bezeichnen mit $\mathscr{A} := \varinjlim(\mathscr{A}_n, \iota_n)$ die Vervollständigung der Quotientenalgebra $\mathscr{B}/\mathscr{B}_0$ und nennen $\mathscr{A}$ den *induktiven Limes* von $(\mathscr{A}_n, \iota_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Das Objekt $(\mathscr{A}_n, \iota_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *induktives System*.

(c) Zeigen Sie, dass die Abbildungen $\varphi_n : \mathscr{A}_n \to \mathscr{A}$ mit

$$\varphi_n(x) := (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-1 \text{ Stück}}, \underbrace{x, \iota_n(x), \iota_{n+1}(\iota_n(x)), \dots}_{\text{Rest}}) + \mathscr{A}_0$$

*-Homomorphismen definieren, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung $\varphi_{n+1} \circ \iota_n = \varphi_n$ gilt.

(d) Zeigen Sie, dass die Menge $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n(\mathscr{A}_n)$ dicht in $\mathscr{A}$ liegt.

(e) Sei $\mathscr{C}$ eine C*-Algebra und sei für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein *-Homomorphismus $f_n : \mathscr{A}_n \to \mathscr{C}$ gegeben mit $f_{n+1} \circ \iota_n = f_n$. Zeigen Sie, dass es genau einen *-Homomorphismus $f : \mathscr{A} \to \mathscr{C}$ gibt mit $f(\varphi_n(x)) = f_n(x)$.

(f) Sei A eine C*-Algebra und sei $\psi_n : \mathscr{A}_n \to A$ eine Familie von *-Homomorphismen mit $\psi_{n+1} \circ \iota_n = \psi_n$. Weiter gebe es zu jeder C*-Algebra $\mathscr{C}$ und jeder Familie von *-Homomorphismen $f_n : \mathscr{A}_n \to \mathscr{C}$ mit $f_{n+1} \circ \iota_n = f_n$ einen eindeutigen *-Homomorphismus $f : A \to \mathscr{C}$ mit $f(\psi_n(x)) = f_n(x)$. Zeigen Sie, dass es einen *-Isomorphismus $\alpha : \mathscr{A} \to A$ gibt mit $\alpha(\varphi_n(x)) = \psi_n(x)$.

(g) Zeichnen Sie zu den Aussagen in (e) und (f) kommutative Diagramme.

Aufgabe G31 (Die C*-Algebra $K(\mathscr{H})$ als induktiver Limes)
Zeigen Sie, dass $K(\mathscr{H})$ isomorph zum induktiven Limes des folgenden induktiven Systems ist: $\mathscr{B}_n = M_n$,

$$\iota_n(x) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} & 0 \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$