Spektraltheorie und Operatoralgebren
5. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Walter Reußwig

SS 2013
17. Mai 2013

Übungen

Aufgabe G23 (Projektionen, Orthogonalität und partielle Isometrien)
Sei $\mathscr{A}$ eine C*-Algebra. Zwei Projektionen $p, q \in \mathscr{A}$ heißen *orthogonal*, wenn $p \cdot q = 0$ gilt. Wir schreiben in diesem Fall $p \perp q$.

(a) Zeigen Sie, dass zwei Projektionen $p, q \in \mathscr{A}$ genau dann orthogonal sind, wenn $p + q$ ebenfalls eine Projektion ist.

Seien nun $s_1, s_2 \in \mathscr{A}$ partielle Isometrien mit Initialprojektionen $p_1, p_2 \in \mathscr{A}$ und Finalprojektionen $q_1, q_2 \in \mathscr{A}$.

(b) Es gilt $p_1 \perp p_2$ genau dann, wenn $s_1 s_2^* = 0$ und $s_2 s_1^* = 0$ gilt.

(b') Es gilt $q_1 \perp q_2$ genau dann, wenn $s_1^* s_2 = 0$ und $s_2^* s_1 = 0$ gilt.

(c) Gilt $p_1 \perp p_2$ und $q_1 \perp q_2$, dann ist $s_1 + s_2$ ebenfalls eine partielle Isometrie.

(d*) Gilt in (c) auch die Umkehrung?

Aufgabe G24 (Kegel und Ordnungen)
Sei V ein reeller Vektorraum. Eine Menge $K \subseteq V$ heißt *echter Kegel*, wenn folgendes gilt:

(K1) Mit $v, w \in K$ ist auch $\lambda v + \mu w \in K$ für alle Skalare $\lambda, \mu \geq 0$.

(K2) Es ist $K \cap (-K) = \{0\}$.

(a) Sei K ein echter Kegel. Zeigen Sie, dass die Relation $v \leq w :\Longleftrightarrow (w - v) \in K$ eine Ordnungsrelation definiert.

(b) Was muss umgekehrt eine Ordnungsrelation auf einem reellen Vektorraum V erfüllen, damit diese durch einen echten Kegel gegeben ist?

(c) Sei $V = \mathbb{R}^2$. Wie sehen die echten Kegel auf V aus? Welche bekannten Ordnungen können Sie identifizieren?

Aufgabe G25 (Wahrscheinlichkeitsmaße auf $[0,1]$)

Sei W die Menge aller regulären Wahrscheinlichkeitsmaße auf $[0,1]$, wobei $[0,1]$ mit der Borelschen σ-Algebra versehen sei. Durch $f \mapsto \int_{[0,1]} f\,d\mu$ wird aus $\mu \in W$ ein stetiges lineares Funktional auf $\mathscr{C}([0,1])$.

(a) Zeigen Sie, dass W bzgl. der σ^*-Topologie auf $\mathscr{C}([0,1])^*$ kompakt und konvex ist.

(b) Bestimmen Sie die Extremalpunkte von W.

(c) Was besagt der Satz von Krein-Milman in diesem Fall?

(d) Finden Sie ein σ^*-konvergentes Netz von endlichen Konvexkombinationen von Extremalpunkten mit Lebesguemaß als Grenzwert.

(e) Ist das Lebesguemaß auf diese Weise auch in der Normtopologie auf W approximierbar?

Aufgabe G26 (*-Homomorphismen auf M_n)

Sei M_n die C*-Algebra der komplexen $n \times n$ Matrizen.

(a) Zeigen Sie, dass für jede unitäre Matrix $u \in M_n$ die Abbildung $\alpha_u(x) := u^*xu$ auf M_n einen *-Automorphismus definiert.

(b) Sei $\alpha : M_n \to M_n$ ein *-Automorphismus. Zeigen Sie, dass es eine unitäre Matrix $u \in M_n$ gibt, mit $\alpha = \alpha_u$. (Hinweis: Matrixeinheiten)

(c) Finden Sie für ein $n \in \mathbb{N}$ ein Beispiel einer C*-Unteralgebra $\mathscr{A}$ von M_n und einem auf dieser Unteralgebra wirkenden *-Automorphismus $\alpha : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$, der nicht durch ein unitäres Element $u \in \mathscr{A}$ induziert ist.

Aufgabe G27 (Kompaktifizierungen)

Sei $\mathscr{A} = \mathscr{C}_b(\mathbb{R})$ die C*-Algebra der beschränkten Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit Supremumsnorm. Sei $\mathscr{A}_c$ die C*-Unteralgebra von $\mathscr{A}$, welche aus allen Funktionen $f \in \mathscr{A}$ besteht, für welche $\lim_{|x|\to\infty} f(x)$ existiert.

(a) Finden Sie einige Beispiele von C*-Unteralgebren $\mathscr{B}$ mit $\mathscr{A}_c \subseteq \mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}$.

(b) Jede solche C*-Algebra ist isomorph zu $\mathscr{C}(\Omega)$, wobei Ω ein kompakter Raum ist. Zeigen Sie, dass Ω eine Kompaktifizierung von $\mathbb{R}$ ist, also dass es eine stetige Injektion $f : \mathbb{R} \to \Omega$ gibt, die $\mathbb{R}$ homöomorph auf $f(\mathbb{R})$ abbildet, so dass $f(\mathbb{R})$ dicht in Ω ist.

(c) Zeigen Sie umgekehrt, dass jede Kompaktifizierung von $\mathbb{R}$ von dieser Art ist. Damit gibt es eine kanonische 1:1-Beziehung zwischen Kompaktifizierungen von $\mathbb{R}$ und C*-Algebren $\mathscr{A}_c \subseteq \mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}$.

(d) Sei $\beta\mathbb{R}$ die Kompaktifizierung, die zu $\mathscr{C}_b(\mathbb{R})$ gehört. Es bezeichne $\beta : \mathbb{R} \to \beta\mathbb{R}$ die zugehörige Einbettung. Zeigen Sie: Ist K eine beliebige Kompaktifizierung von $\mathbb{R}$ mit Einbettung $f : \mathbb{R} \to K$, dann existiert genau eine stetige Surjektion $\gamma : \beta\mathbb{R} \to K$ mit $\gamma \circ \beta = f$.

In diesem Sinn ist $\beta\mathbb{R}$ die größte Kompaktifizierung von $\mathbb{R}$ und heißt *Stone-Čech-Kompaktifizierung*.