Spektraltheorie
und Operatoralgebren
4. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Walter Reußwig

SS 2013
10. Mai 2013

Übungen

Aufgabe G19 (Äquivalente Charakterisierungen partieller Isometrien in C*-Algebren)
Sei $\mathscr{A}$ eine C*-Algebra und $s \in \mathscr{A}$ ein Element. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) s^*s ist Projektion in $\mathscr{A}$.

(b) $s = ss^*s$.

Somit ist $s \in \mathscr{A}$ genau dann eine partielle Isometrie, wenn $s = ss^*s$ gilt.

Aufgabe G20 (Zur Faltungsalgebra von $\mathbb{N}_0$)
Sei $\mathscr{A} := l^1(\mathbb{N}_0)$, dann wird $\mathscr{A}$ mit Einsnorm $\|\cdot\|_1$ zum Banachraum. Setze für $x, y \in \mathscr{A}$:

$$(x * y)(n) := \sum_{k=0}^{n} x(k) \cdot y(n-k).$$

(a) Zeigen Sie, dass $(\mathscr{A}, *, \|\cdot\|_1)$ eine kommutative Banachunteralgebra mit Eins von $l^1(\mathbb{Z})$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass es Elemente in $\mathscr{A}$ gibt, die nicht in $\mathscr{A}$ aber in $l^1(\mathbb{Z})$ invertierbar sind. Für solche Elemente $x \in \mathscr{A}$ gilt somit $0 \in \sigma_{\mathscr{A}}(x)$, aber $0 \notin \sigma_{l^1(\mathbb{Z})}(x)$.

(c) Bestimmen Sie das Spektrum Ω von $\mathscr{A}$, sowie den Gelfandhomomorphismus.

(d) Wie können Sie das Bild des Gelfandhomomorphismus charakterisieren: Welche Funktionen in $\mathscr{C}(\Omega)$ gehören zu $\hat{\mathscr{A}}$?

Aufgabe G21 (Zur Faltungsalgebra von $\mathbb{Z}$)
Sei $\mathscr{A} = (l^1(\mathbb{Z}),\ *,\ \|\cdot\|_1)$. Wir erklären auf $\mathscr{A}$ eine Abbildung $f \mapsto f^*$ durch $(f^*)(n) := \overline{f(-n)}$.

(a) Zeigen Sie, dass diese Abbildung eine Involution definiert und mit dieser $\mathscr{A}$ zu einer Banach-*-Algebra wird.

(b) Ist diese Banach-*-Algebra eine C*-Algebra?

Aufgabe G22 (Der Satz von Stone-Weierstraß)
In dieser Aufgabe wollen wir den Satz von Stone-Weierstraß beweisen.

Satz: Sei X kompakt und $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{C}(X,\mathbb{R})$ eine punktetrennende Algebra mit $\mathbb{1} \in \mathscr{A}$. Dann ist $\mathscr{A}$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ dicht in $\mathscr{C}(X,\mathbb{R})$.

Dies werden wir schrittweise angehen. Wir nutzen im ersten Schritt den Satz von Dini:

Satz: Sei X ein kompakter Raum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge stetiger reellwertiger Funktionen auf X. Konvergiert diese Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen eine stetige Funktion f, so konvergiert die Folge sogar gleichmäßig gegen f.

Wir definieren eine Folge von Polynomen. Wir setzen $p_1(t) := 0$ und

$$p_{n+1}(t) := p_n(t) + \frac{1}{2}(t - p_n(t)^2).$$

Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Die Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in $\mathscr{C}([0,1])$ gleichmäßig gegen die Funktion $f(t) = \sqrt{t}$.

(b) Für jede Funktion $f \in \mathscr{A}$ mit $\|f\|_\infty = 1$ gilt $p_n(f^2) \in \mathscr{A}$. Weiter gilt $|f| \in \overline{A}$.

(c) Für $f, g \in \mathscr{A}$ gilt auch $\min(f,g) \in \overline{\mathscr{A}}$. Also gilt: $f_1, \ldots, f_n \in \mathscr{A} \Rightarrow \min(f_1,\ldots,f_n) \in \overline{\mathscr{A}}$.

(d) Für jede Wahl $x, y \in X$ und $r, s \in \mathbb{R}$ gibt es eine Funktion $h \in \mathscr{A}$ mit $h(x) = r$ und $h(y) = s$.

(e) Sei $f \in \mathscr{C}(X,\ \mathbb{R})$. Für alle $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ gibt es eine Funktion $g_x \in \overline{\mathscr{A}}$ mit $f(x) = g_x(x)$ und $g_x(y) \leq f(y) + \varepsilon$ für alle $y \in X$.
Hinweis: Konstruieren Sie g_x mit Hilfe einer Überdeckung von X aus offenen Mengen und dem Minimum endlich vieler Funktionen aus $\mathscr{A}$.

(f) Für $f, g \in \mathscr{A}$ gilt auch $\max(f,g) \in \overline{\mathscr{A}}$. Also gilt: $f_1, \ldots, f_n \in \mathscr{A} \Rightarrow \max(f_1,\ldots,f_n) \in \overline{\mathscr{A}}$.

(g) Sei $f \in \mathscr{C}(X,\ \mathbb{R})$. Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es eine Funktion $\varphi_\varepsilon \in \overline{\mathscr{A}}$ mit

$$f(y) - \varepsilon \leq \varphi_\varepsilon(y) \leq f(y) + \varepsilon.$$

(h) Folgern Sie den Satz von Stone-Weierstraß.

Zeigen Sie mit dieser Vorarbeit die komplexe Version des Satzes von Stone-Weierstraß:

Ist $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{C}(X,\ \mathbb{C})$ punktetrennend, $\mathbb{1} \in \mathscr{A}$ und gilt $f \in \mathscr{A} \Rightarrow f^* \in \mathscr{A}$, dann ist $\mathscr{A}$ dicht in $\mathscr{C}(X,\ \mathbb{C})$.

Hinweis: Betrachten Sie $\mathscr{A}_\mathbb{R} := \mathscr{A} \cap \mathscr{C}(X,\ \mathbb{R})$. Zeigen und verwenden Sie: $\mathscr{A} \cong \mathscr{A}_\mathbb{R} \oplus i \cdot \mathscr{A}_\mathbb{R}$, sowie $\mathscr{C}(X,\ \mathbb{C}) \cong \mathscr{C}(X,\ \mathbb{R}) \oplus i \cdot \mathscr{C}(X,\ \mathbb{R})$ als reelle Vektorräume.

Quelle: „An Introduction to Topology“, K. H. Neeb, Vorlesungsskript, 2009.