Spektraltheorie
und Operatoralgebren
3. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Walter Reußwig

SS 2013
2. Mai 2013

Übungen

Aufgabe G13 (Ideale in der Algebra der $n \times n$-Matrizen)
Sei $\mathscr{A}$ die C*-Algebra der komplexen $n \times n$-Matrizen.

(a) Zeigen Sie: Besitzt ein zweiseitiges Ideal $I \trianglelefteq \mathscr{A}$ ein von Null verschiedenes Element, so folgt $\mathbb{1} \in I$. Also existieren in $\mathscr{A}$ nur triviale zweiseitge Ideale.

(b) Bestimmen Sie alle multiplikativen Linearformen $\varphi : \mathscr{A} \to \mathbb{C}$.

(c) Gibt es in $\mathscr{A}$ nichttriviale Links- bzw. Rechtsideale?

Aufgabe G14 (Eine Banachalgebra von Matrizen)
Es sei $\mathscr{A}$ die von S und $\mathbb{1}$ in M_n erzeugte kommutative Banachalgebra (ohne Adjungiertenbildung!).

$$S := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Elemente von $\mathscr{A}$, das Spektrum $\hat{\mathscr{A}}$, den Gelfandhomomorphismus Φ sowie das Radikal von $\mathscr{A}$ (Also $\ker(\Phi)$).

Aufgabe G15 (Eine kommutative Banachalgebra)
Sei $\mathscr{A} := \mathscr{C}^1([0,1])$ der Raum aller einmal stetig differenzierbaren komplexwertigen Funktionen auf $[0,1]$ mit der $\|f\| := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ und der Involution $f^*(x) = \overline{f(x)}$. Zeigen Sie, dass $(\mathscr{A}, \|\cdot\|)$ eine Banach*-Algebra mit Eins definiert (Beim Nachweis der Vollständigkeit sollten Sie sich an ein Resultat über gleichmäßige Konvergenz geeigneter differenzierbarer Funktionenfolgen erinnern). Finden Sie ein Beispiel eines Elementes $f \in \mathscr{A}$ mit $r_\sigma(f) < \|f\|$.

Aufgabe G16 (Maximal abelsche Unteralgebren)
Sei $\mathscr{B}$ eine Banachalgebra mit Eins.

(a) Sei $\mathscr{A}$ eine abelsche Unteralgebra von $\mathscr{B}$ und $b \in \mathscr{B}$ ein Element, welches mit jedem $a \in \mathscr{A}$ vertauscht. Zeigen Sie, dass die Banachalgebra, welche von $\mathscr{A}$ und b erzeugt wird, ebenfalls abelsch ist.

Eine Unteralgebra $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$ heißt *maximal abelsche Unteralgebra von* $\mathscr{B}$, wenn $\mathscr{A}$ abelsch ist und wenn für jede abelsche Unteralgebra $\mathscr{C}$ von $\mathscr{B}$ aus $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{C}$ bereits $\mathscr{A} = \mathscr{C}$ folgt.

(b) Sei $\mathscr{A}$ eine maximal abelsche Unteralgebra. Zeigen Sie, dass für alle $a \in \mathscr{A}$ das Spektrum von a in $\mathscr{B}$ mit dem Spektrum von a in $\mathscr{A}$ übereinstimmt, also $\sigma_{\mathscr{B}}(a) = \sigma_{\mathscr{A}}(a)$ gilt.

(c) Sei $\mathscr{B}$ die Banachalgebra der $n \times n$-Matrizen. Geben Sie zwei Beispiele $\mathscr{A}_1$ und $\mathscr{A}_2$ von maximal abelschen Unteralgebren von $\mathscr{B}$ an.

Aufgabe G17 (Approximierende Eins)
Sei $\mathscr{A}$ eine Banachalgebra mit Eins. Ein Netz $(u_i)_{i\in I} \subseteq \mathscr{A}$ heißt *approximierende Eins in* $\mathscr{A}$, falls:

- Für jedes $i \in I$ gilt $\|u_i\| \leq 1$.
- Für jedes $x \in \mathscr{A}$ gilt $\lim_{i\in I}(x - u_i \cdot x) = 0$ und $\lim_{i\in I}(x - x \cdot u_i) = 0$.

(a) Machen Sie sich klar, dass die Banachalgebra $L^1([0,1])$ mit Faltung $*$ als Multiplikation eine approximierende Eins besitzt.

Hinweis: In der Vorlesung Funktionalanalysis wurde gezeigt, dass es eine Folge von Funktionen $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^1([0,1])$ gibt mit $\|F_n\|_1 = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} F_n * f = f$ gleichmäßig für alle $f \in \mathscr{C}([0,1])$ (Stichwort: Fejer-Kern).

(b) Zeigen Sie: Besitzt eine Banachalgebra $\mathscr{A}$ eine approximierende Eins, so ist die linksreguläre Darstellung $\mathscr{A} \ni x \to L_x \in \mathscr{B}(\mathscr{A})$ isometrisch.

Aufgabe G18 (Eine kommutative Banachalgebra holomorpher Funktionen)
Sei $\mathscr{A}$ die Menge aller holomorphen Funktionen auf der offenen Kreisscheibe $\mathbb{D}$, die stetig auf die abgeschlossene Kreisscheibe $\overline{\mathbb{D}}$ fortsetzbar sind. Zeigen Sie:

(a) Für $f \in \mathscr{A}$ gilt $\|f\|_\infty = \|f \restriction \mathbb{T}\|_\infty$.

(b) Die Algebra $\mathscr{A}$ ist eine Banachalgebra, in welcher die komplexen Polynome dicht liegen.

(c) Durch $f^*(z) := \overline{f(\overline{z})}$ wird $\mathscr{A}$ zu einer involutiven Banachalgebra.

(d) Ist $\mathscr{A}$ eine C*-Algebra?

(e) Zeigen Sie, dass $\hat{\mathscr{A}} \cong \overline{\mathbb{D}}$ gilt. Folgern Sie, dass $\mathscr{A}$ eine echte Teilmenge von $\mathscr{C}(\mathbb{T})$ ist.

Diese Algebra $\mathscr{A}$ heißt auch *Disk-Algebra* und wird auch mit $\mathscr{A}(\mathbb{D})$ bezeichnet.

Hinweis: Eventuell ist es nützlich, folgende Gleichung zu beweisen: Für alle Punkte $\omega \in \mathbb{D}$ und jedes Polynom $p = \sum_{n=0}^{N} a_n \cdot z^n$ gilt

$$p(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{p(e^{it})}{1 - \omega \cdot e^{it}} dt.$$