Spektraltheorie
und Operatoralgebren
2. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Walter Reußwig

SS 2013
29. April. 2013

Übungen

Aufgabe G7 (Invertierbare Elemente einer Banachalgebra)
Sei $\mathscr{A}$ eine Banachalgebra mit Eins. Zeigen Sie, dass die Menge $\mathscr{A}^\times$ der invertierbaren Elemente in $\mathscr{A}$ offen ist und auf $\mathscr{A}^\times$ die Inversenbildung $x \mapsto x^{-1}$ stetig ist.

Hinweis: Betrachten Sie für $x \in \mathscr{A}^\times$ die Elemente $y \in \mathscr{A}^\times$ mit $\|x - y\| < \frac{1}{\|x^{-1}\|}$.

Aufgabe G8 (Extremalpunkte konvexer Mengen)
Sei $\mathscr{A} := \mathscr{C}([0,1])$ und sei $\mathscr{B} := L^\infty([0,1],\ \lambda)$. Wir definieren

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}_1 &:= \{f \in \mathscr{A} :\ \|f\|_\infty \leq 1\}, & \mathscr{B}_1 &:= \{f \in \mathscr{B} :\ \|f\|_\infty \leq 1\},\\
\mathscr{A}_1^h &:= \{f \in \mathscr{A}_1 :\ f = f^*\}, & \mathscr{B}_1^h &:= \{f \in \mathscr{B}_1 :\ f = f^*\},\\
\mathscr{A}_1^+ &:= \{f \in \mathscr{A}_1 :\ f \geq 0\}, & \mathscr{B}_1^+ &:= \{f \in \mathscr{B}_1 :\ f \geq 0\}.
\end{aligned}$$

Machen Sie sich klar, dass obige Mengen abgeschlossen und konvex sind und bestimmen Sie jeweils die Extremalpunkte dieser Mengen. In welchen Fällen gibt es „genügend viele“ Extremalpunkte?

Aufgabe G9 (Die linksreguläre Darstellung einer Banachalgebra)
Sei $\mathscr{A}$ eine Banachalgebra mit Eins und sei $\mathscr{A} \ni x \to L_x \in \mathscr{B}(\mathscr{A})$ die linksreguläre Darstellung. Zeigen Sie, dass $x \in \mathscr{A}$ genau dann invertierbar ist, wenn $L_x \in \mathscr{B}(\mathscr{A})$ invertierbar ist. Also folgt $\sigma_{\mathscr{A}}(x) = \sigma_{\mathscr{B}(\mathscr{A})}(L_x)$.

Hinweis: Betrachten Sie $y := L_x^{-1}(\mathbb{1})$.

Aufgabe G10 (Die linksreguläre Darstellung der $n \times n$ Matrizen)
Sei $\mathscr{A} = M_n$ die Banachalgebra der komplexen $n \times n$ Matrizen mit der üblichen Adjungiertenbildung. Wir identifizieren eine Matrix $y \in \mathscr{A}$ als Zeilenvektor von Spaltenvektoren $y = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_n \end{pmatrix}$. Dies führt zu einem Vektorraumisomorphismus

$$M_n \ni y \mapsto \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1n} & s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2n} & \dots & s_{n1} & s_{n2} & \dots & s_{nn} \end{pmatrix}^T \in \mathbb{C}^{n^2},$$

indem also die Spalten untereinander in einen großen Spaltenvektor geschrieben werden. Die linksreguläre Darstellung L_x eines Elementes $x \in M_n$ können wir somit als lineare Abbildung mit einem Element $\pi(x) \in M_{n^2}$ identifizieren. Bestimmen Sie diese Matrix $\pi(x)$.

Hinweis: Wenn Sie y mit $\begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_n \end{pmatrix}$ identifizieren, wie sieht dann das Element $L_x(y)$ nach dieser Identifikation aus?

Aufgabe G11 (Konkrete Adjunktion der Eins)

Diese Aufgabe können Sie überspringen, wenn Sie sich direkt Aufgabe **G12** zutrauen.

Gegeben sei die Funktionenalgebra $\mathscr{A} := \{f \in \mathscr{C}([0,1[),\ \lim_{x\to 1} f(x) = 0\}$, versehen mit der Supremumsnorm und üblicher Adjunktion durch punktweise komplexe Konjugation. Offenbar ist $\mathscr{A}$ eine C*-Algebra ohne Eins. Zeigen Sie, dass die C*-Algebra $\tilde{\mathscr{A}}$, die durch Adjunktion einer Eins zu $\mathscr{A}$ entsteht, isomorph zu $\mathscr{C}([0,1])$ ist.

Aufgabe G12 (Die Einpunktkompaktifizierung)

Ein separierter[1] topologischer Raum X heißt *lokalkompakt*, wenn für jeden Punkt $x \in X$ und jede offene Umgebung U von x eine kompakte Umgebung $K \subseteq X$ von x mit $K \subseteq U$ existiert. In diesem Sinn gibt es in lokalkompakten Räumen „genügend viele kompakte Mengen“.

Ist X lokalkompakt, so definieren wir einen neuen topologischen Raum $\tilde{X}$ wie folgt: Als Menge definieren wir $\tilde{X} := X \cup \{\infty\}$, wobei $\infty \notin X$ sei. Wir fügen also zu X einen neuen Punkt hinzu. Die Umgebungen dieses Punktes ∞ definieren wir wie folgt: Ist $K \subseteq X$ irgendeine kompakte Umgebung eines Punktes $x \in X$, so sei K^C eine offene Umgebung des Punktes ∞. Jede Menge, die Obermenge einer solchen offenen Umgebung von ∞ ist, definiert eine Umgebung von ∞. Damit wird $\tilde{X}$ zu einem separierten kompakten (Warum kompakt?) topologischen Raum. Dieser Raum $\tilde{X}$ heißt auch *Einpunktkompaktifizierung von X* bzw. *Alexandroffkompaktifizierung von X*.

(a) Zeigen Sie, für $X = [0,1[$ gilt $\tilde{X} \cong [0,1]$.

(b) Zeigen Sie, für $X =]0,1[$ gilt $\tilde{X} \cong \mathbb{T}$.

(c) Wie wird die Einpunktkompaktifizierung von $\mathbb{R}^2$ aussehen?

Wir können auf einem lokalkompakten Raum X die Algebra

$$\mathscr{C}_0(X) := \{f : X \to \mathbb{C} \text{ stetig} : \text{Für alle } \varepsilon > 0 \text{ existiert eine kompakte Umgebung } K \subseteq X \\ \text{mit } |f(x)| \le \varepsilon \text{ für alle } x \in K^C\}$$

definieren. Diese Algebra heißt auch der Raum der stetigen Funktionen, die im Unendlichen verschwinden. (Warum?)

(d) Zeigen Sie: $\mathscr{C}_0(X)$ ist eine C*-Algebra ohne Eins. Die durch Adjunktion der Eins entstehende C*-Algebra $\tilde{\mathscr{C}}_0(X)$ ist isomorph zu $\mathscr{C}(\tilde{X})$, wobei dieser Isomorphismus das Ideal $\mathscr{C}_0(X)$ in $\tilde{\mathscr{C}}_0(X)$ auf die Menge der Funktionen abbildet, die in ∞ eine Nullstelle haben. Vergleichen Sie diese Ergebnisse mit Aufgabe 5.

[1] Für jede Wahl $x, y \in X$ gibt es Umgebungen U von x und V von y mit $U \cap V = \emptyset$.