Spektraltheorie und Operatoralgebren
1. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik **SS 2013**
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer **19. April. 2013**
Walter Reußwig

Übungen

Aufgabe G1 (Idempotente Funktionen)
Sei X ein kompakter Raum. Zeigen Sie, dass genau dann eine Funktion $f \in \mathscr{C}(X)$ mit $0 \neq f \neq \mathbb{1}$ mit $f^2 = f$ existiert, wenn X nicht zusammenhängend ist.

Aufgabe G2 (Das Spektrum einer Funktion)
Sei $f \in \mathscr{C}([0,1])$ und $g \in \mathrm{L}^\infty([0,1],\ \mathscr{B},\ \lambda)$. Bestimmen Sie $\sigma(f)$ und $\sigma(g)$.

Aufgabe G3 (Approximative Eigenvektoren)
Sei E ein Banachraum und $T:\ E \to E$ ein stetiger linearer Operator. Für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ existiere eine Folge von Einheitsvektoren $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in E mit $\lim_{n\to\infty}(T - \lambda \cdot \mathbb{1})x_n = 0$. In diesem Fall heißt die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *approximativer Eigenvektor zu* λ.

Zeigen Sie, dass $(T - \lambda\mathbb{1})$ nicht beschränkt invertierbar ist, wenn ein approximativer Eigenvektor zu λ existiert.

Aufgabe G4 (Der Shiftoperator)
Sei $E := \ell^\infty(\mathbb{Z})$ und $\mathscr{H} := \ell^2(\mathbb{Z})$. Wir betrachten in $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ bzw. $\mathscr{B}(E)$ den *Shiftoperator* definiert durch $S(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} := (x_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}$.

(a) Wir betrachten zuerst den Fall $S:\ E \to E$. Zeigen Sie, dass jede Zahl $\lambda \in \mathbb{T}$ ein Eigenwert von S ist. Bestimmen Sie $\sigma(S)$.

(b) Zeigen Sie, dass $S:\ \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ keine Eigenvektoren und Eigenwerte besitzt.

(c) Konstruieren Sie mit Hilfe von (a) für jedes $\lambda \in \mathbb{T}$ einen approximativen Eigenvektor $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{H}$ für S und bestimmen Sie $\sigma(S)$.

Der Shiftoperator auf E besitzt also das gleiche Spektrum wie der Shiftoperator auf $\mathscr{H}$, allerdings sind die Gründe, warum jeweils $(S - \lambda\mathbb{1})$ nicht beschränkt invertierbar ist, völlig verschieden.

Aufgabe G5 (C*-Algebren stetiger Funktionen auf $\mathbb{R}$)
Wir betrachten die Algebra $\mathscr{C}(\mathbb{R})$ der stetigen komplexwertigen Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit punktweiser komplexer Konjugation als Adjunktion. Weiter betrachten wir die Unteralgebren

$$\begin{aligned}
\mathscr{C}_b(\mathbb{R}) &:= \{f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}) : \ \|f\|_\infty < \infty\},\\
\mathscr{C}_0(\mathbb{R}) &:= \{f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}) : \ \lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0\},\\
\mathscr{C}_c(\mathbb{R}) &:= \{f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}) : \ \lim_{|x|\to\infty} f(x) \text{ existiert}\},\\
\mathscr{C}_\pm(\mathbb{R}) &:= \{f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}) : \ \lim_{x\to\infty} f(x) \text{ existiert und } \lim_{x\to-\infty} f(x) \text{ existiert}\},\\
\mathscr{C}_+(\mathbb{R}) &:= \{f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}) : \ \lim_{x\to\infty} f(x) \text{ existiert und } \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0\}.
\end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass diese fünf Unteralgebren C*-Algebren sind.

(b) Die Algebren $\mathscr{C}_c(\mathbb{R})$ und $\mathscr{C}_\pm(\mathbb{R})$ sind kommutative C*-Algebren mit $\mathbb{1}$. Finden Sie kompakte Räume X und Y mit $\mathscr{C}_\pm(\mathbb{R}) \cong \mathscr{C}(X)$ und $\mathscr{C}_c(\mathbb{R}) \cong \mathscr{C}(Y)$.

(c) Machen Sie sich klar, welche der oben definierten Algebren Ideale anderer oben beschriebenen Algebren bilden.

(d) Zeigen Sie, dass $\mathscr{C}_+(\mathbb{R})$ ein maximales Ideal in $\mathscr{C}_\pm(\mathbb{R})$ ist. Sei $\delta : \ \mathscr{C}_\pm(\mathbb{R}) \to \mathscr{C}_\pm(\mathbb{R})/\mathscr{C}_+(\mathbb{R})$ der Quotientenhomomorphismus. Bestimmen Sie $\delta(f)$ für $f \in \mathscr{C}_\pm(\mathbb{R})$. Wie können Sie diesen durch den Isomorphismus $\mathscr{C}_\pm(\mathbb{R}) \cong \mathscr{C}(X)$ interpretieren? Wie liegt das Ideal $\mathscr{C}_+(\mathbb{R})$ unter diesem Isomorphismus in $\mathscr{C}(X)$?

(e) Auch $\mathscr{C}_0(\mathbb{R})$ ist ein maximales Ideal in $\mathscr{C}_c(\mathbb{R})$. Wie liegt nun analog zu (d) das Ideal $\mathscr{C}_0(\mathbb{R})$ in $\mathscr{C}(Y)$?

(f) Finden Sie ein interessantes weiteres Ideal in $\mathscr{C}_b(\mathbb{R})$.

Aufgabe G6 (Invertierbarkeit in $\mathscr{C}_b(\mathbb{R})$)
Zeigen oder widerlegen Sie: Jede Funktion $f \in \mathscr{C}_b(\mathbb{R})$, welche keine Nullstelle besitzt, ist in $\mathscr{C}_b(\mathbb{R})$ beschränkt invertierbar.

Die notwendigen Begriffe zu Idealen

Sei R ein Ring. Ein *Ideal* $I \trianglelefteq R$ ist ein Unterring $I \subseteq R$, so dass für alle $r \in R$ und $x \in I$ sowohl $r \cdot x \in I$ als auch $x \cdot r \in I$ gilt. Ein Ideal I heißt *echt*, falls $I \neq R$ gilt. Ein echtes Ideal I heißt *maximales Ideal*, falls für jedes Ideal $J \trianglelefteq R$ mit $I \subseteq J$ entweder $I = J$ oder $J = R$ folgt. Ist R ein kommutativer Ring mit Eins, so ist der Quotientenring R/I genau dann ein Körper, wenn I ein maximales Ideal ist. Jedes echte Ideal ist in einem maximalen Ideal enthalten.

Zur Erinnerung: Der Quotientenring R/I besteht aus den Nebenklassen $R/I = \{x + I : \ x \in R\}$ mit Addition $(x + I) + (y + I) := (x + y) + I$ und Multiplikation $(x + I) \cdot (y + I) := (x \cdot y) + I$. Die Abbildung $q : \ R \to R/I$ mit $q(x) := x + I$ definiert einen surjektiven Ringhomomorphismus.