Diskrete Optimierung
12. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
Dipl.-Math. Madeline Lips

SoSe 2013
2. und 4. Juli 2013

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Lagrange-Relaxierung)
Aus der Vorlesung wissen wir, dass (im Falle der Maximierung der Zielfunktion) zwischen den Zielfunktionswerten des IP, der Lagrange-Relaxierung (LR) und des LP die folgende Beziehung gilt: $z_{IP} \leq z_{LR} \leq z_{LP}$.
Finden Sie jeweils ein Beispiel, so dass jeweils eine Ungleichung scharf ist, und eines, in dem beide Ungleichungen scharf sind.

Ordentliche Zeichnungen sind ausreichend.

Aufgabe G2 (Symmetrisches TSP)
Sei $G = (V, E)$ ein vollständiger Graph mit $|V| = n$ Knoten und Kantengewichten c_{ij} für $1 \leq i < j \leq n$. Wir betrachten das folgende ganzzahlige Programm, welches eine Formulierung für das symmetrische Traveling Salesman-Problem (TSP) auf G ist:

$$\min \quad \sum_{i<j} c_{ij} x_{ij} \tag{1}$$

$$\text{s. t.} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 2, \quad i = 1, \dots, n \tag{2}$$

$$\sum_{i<j} x_{ij} = n \tag{3}$$

$$\sum_{(i,j)\in\gamma(S),\, i<j} x_{ij} \leq |S| - 1 \quad \forall\, S \subseteq V\setminus\{1\},\ |S| \geq 3 \tag{4}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall\, i, j = 1, \dots, n,\ i \neq j. \tag{5}$$

In Ungleichung (4) ist mit $\gamma(S)$ die Menge aller Kanten gemeint, welche je zwei Knoten in S verbinden.

Die Ergebnisse sollen mit dem TSP-Problem und seiner Lagrange-Relaxierung aus der Vorlesung verglichen werden.

(a) Geben Sie die Lagrange-Funktion $L(\lambda)$ und die Lagrange-Relaxierung bzgl. der Nebenbedingungen (2) für $i = 2, \dots, n$ an.

(b) Welche Eigenschaften haben die zulässigen Lösungen des relaxierten Problems im Vergleich zu einer Tour?

Aufgabe G3 (TSP)
Sei $G = (V, E)$ ein vollständiger, ungerichteter Graph und $c : E \to \mathbb{R}_+$ eine Kostenfunktion, die die Dreiecksungleichung erfüllt, d. h. $c_{ij} \leq c_{ik} + c_{kj}$ für alle $i, j, k \in V$. Geben Sie einen polynomiellen Algorithmus an, der eine zulässige TSP-Tour für G ermittelt und dessen Lösung bezüglich c höchstens zweimal so schlecht wie die optimale TSP-Tour des Graphen ist.

Hinweis: Betrachten Sie minimal aufspannende Bäume.

Aufgabe G4 (Modellierung)
Sei $J = \{1, \dots n\}$ eine Menge von Jobs. Jeder Job $j \in J$ hat eine release time $r_j \geq 0$, eine deadline $d_j \geq r_j$ und eine Bearbeitungszeit $p_j \geq 0$. Das Ziel beim deadline scheduling besteht darin, eine zulässige Anordnung aller Jobs, ein Schedule, zu finden, so dass immer nur ein Job zur gleichen Zeit ausgeführt wird. Zusätzlich darf die Startzeit eines Jobs nicht vor seiner release time sein und die Fertigstellungszeit $(S_j + p_j)$ darf die deadline nicht überschreiten.

Modellieren Sie die Berechnung eines gültigen Schedules als MILP.

Hausübung

Aufgabe H1 (Lagrange-Relaxierung) (5 Punkte)
Betrachte das Problem (P):

$$\begin{array}{lrcl} \min & c^T x & & \\ \text{s.t.} & A_1 x & \leq & b_1 \\ & A_2 x & \leq & b_2 \\ & x & \in & \mathbb{Z}^{n-p} \times \mathbb{R}^p \end{array}$$

und für $\lambda \geq 0$

$$L(\lambda) = \min_{x \in P^2} \{c^T x - \lambda^T (b_1 - A_1 x)\},$$

wobei $P^2 = \{x \in \mathbb{Z}^{n-p} \times \mathbb{R}^p \mid A_2 x \leq b_2\}$. Beweise folgende Aussage:
Falls x_λ Optimallösung von $L(\lambda)$ ist mit

(a) $A_1 x_\lambda \leq b_1$,

(b) $(A_1 x_\lambda)_i = (b_1)_i$, falls $\lambda_i > 0$,

dann ist x_λ Optimallösung von (P).

Aufgabe H2 (Subgradientenmethode) (5 Punkte)
Gegeben sei das folgende ganzzahlige Optimierungsproblem (P):

$$\begin{array}{lrcl} \min & 4 - 2x_1 - x_2 & & \\ \text{s.t.} & 3x_1 + 4x_2 & \leq & 6 \\ & x_1, x_2 & \in & \{0, 1\}. \end{array}$$

(a) Geben Sie die Lagrange-Funktion $L(\lambda)$ und die Lagrange-Relaxierung von (P) an, wobei die Nebenbedingung $3x_1 + 4x_2 \leq 6$ relaxiert werden soll.

(b) Skizzieren Sie $L(\lambda)$, und berechnen Sie das Subdifferential von L:

$$\partial L(\lambda) := \{g \in \mathbb{R} \mid g \text{ ist ein Subgradient an der Stelle } \lambda\}$$

Hinweis: Da $x_1, x_2 \in \{0, 1\}$ gibt es nicht viele zulässige Punkte und die Lagrange-Relaxierung lässt sich so umschreiben, dass sie nur von λ abhängt.

(c) Führen Sie fünf Schritte der Subgradientenmethode aus, um das Maximum von L zu approximieren. Verwenden Sie als Subgradienten den folgenden:
Sei $\lambda^0 \in \mathbb{R}^{m_1}_+$ und x^0 eine Optimallösung der Lagrange-Relaxierung. Dann ist $g^0 = A_1 x^0 - b_1$ ein Subgradient an L in λ^0.
Wählen Sie als Schrittweite $\mu_k = \frac{1}{k+2}$ und starten Sie mit $\lambda_0 = 0$.

(d) Ermitteln Sie die Optimallösung von (P), und vergleichen Sie den Zielfunktionswert mit dem Optimalwert der Lagrange-Relaxierung.

Algorithm 1 Subgradientenmethode

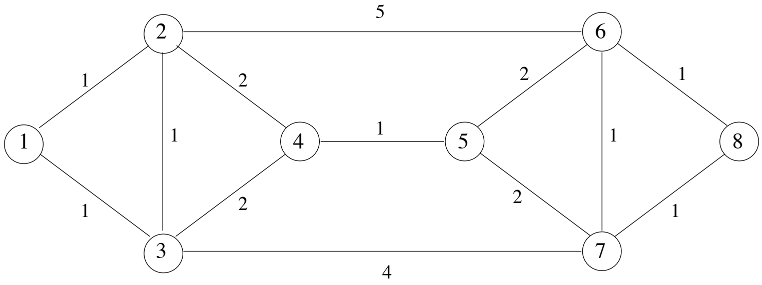
INPUT: Konkave Funktion $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
OUTPUT: $\max\{L(\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}^n_+\}$.

1: Wähle $\lambda_0 \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Setze $k = 0$.
2: Berechne $L(\lambda_k)$. Sei x^k die zugehörige Optimallösung.
3: Ist ein bestimmtes Stop-Kriterium erfüllt, **STOP** (gib λ_k und x^k aus).
4: Wähle ein neues λ^{k+1} durch $\lambda^{k+1} = \lambda^k + \mu^k g^k$ wobei μ^k eine zu spezifizierende Schrittlänge ist.
5: Setze $k = k + 1$ und gehe nach 2.

Aufgabe H3 (Symmetrisches TSP) (5 Punkte)

(a) Bringen Sie die Lagrange-Relaxierung aus Aufgabe G2((a)) in eine Form, die es erlaubt, die Berechnung von $L(\lambda)$ auf die Bestimmung eines gewichtsminimalen 1-Baumes (zusammenhängender Graph mit genau einem Kreis) zurückzuführen. Modifizieren Sie dazu die Kantengewichte c geeignet.

(b) Bestimmen Sie die Optimallösung des relaxierten TSP zu $\lambda = 0$ für folgenden Graphen G:


5
2
6
1
2
2
1
1
1
4
1
5
8
1
2
1
1
2
3
7
4