Diskrete Optimierung
10. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
Dipl.-Math. Madeline Lips

SoSe 2013
18. und 20. Juni 2013

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Schnittebenen)
Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Skizzieren Sie das Polyeder P.

(b) Bestimmen Sie $P^1, \ldots, P^t$, sodass $P^t = P_I$ gilt, und zeichnen Sie die Polyeder $P^1, \ldots, P^t$ in die Skizze ein.

Aufgabe G2 (Schnittebenenalgorithmus von Gomory)
Lösen Sie das folgende Problem mit dem Schnittebenenalgorithmus von Gomory:

$$\begin{aligned} \max\, & 4x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t. } & x_1 - x_2 \leq 1 \\ & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

Aufgabe G3 (Chvátal Rang)
Bestimmen Sie den Chvátal Rang von $P := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 + 2x_2 \leq 3, 2x_i \geq -1, i = 1, 2\}$.

Hausübung

Aufgabe H1 (Gomory-Chvátal-Schnitte) (5 Punkte)

Betrachten Sie

$$P := \operatorname{conv}(x \in \mathbb{Z}^2 \mid x_1 - x_2 \leq 1, x_1 + x_2 \leq 2, -x_1 + x_2 \leq 1, x_1 + x_2 \geq 0) = [0,1] \times [0,1].$$

Bestimmen Sie alle Facetten von P als Gomory-Chvátal-Schnitte.

Aufgabe H2 (Schnittebenenalgorithmus von Gomory) (5 Punkte)

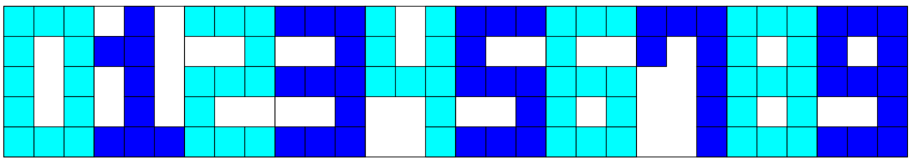
Lösen Sie folgendes Optimierungsprobleme mit Hilfe von Gomory-Schnitten:

$$
\text{(IP)} \quad
\begin{array}{llcl}
\max & 4x_1 - x_2 & & \\
\text{s.t.} & 7x_1 - 2x_2 & \leq & 14 \\
 & x_2 & \leq & 3 \\
 & 2x_1 - 2x_2 & \leq & 3 \\
 & x_1, x_2 & \geq & 0 \\
 & x_1, x_2 & \in \mathbb{Z}, &
\end{array}
\qquad
\text{(MIP)} \quad
\begin{array}{llcl}
\max & 4x_1 - x_2 & & \\
\text{s.t.} & 7x_1 - 2x_2 & \leq & 14 \\
 & x_2 & \leq & 3 \\
 & 2x_1 - 2x_2 & \leq & 3 \\
 & x_1, x_2 & \geq & 0 \\
 & x_1 & \in & \mathbb{Z}.
\end{array}
$$

Zur Lösung der LP-Relaxierungen kann eine Implementierung des Simplex-Algorithmus' genutzt werden (z. B. Ihre eigene Implementierung aus der Einführung in die Optimierung, **polymake** oder **CPLEX**).

Aufgabe H3 (Modellierung) (5 Punkte)

Wir betrachten die digitale Darstellung der Ziffern 0-9 auf einem 5×3-Raster, wie sie in der Abbildung gezeigt wird.



In der abgebildeten Startkonfiguration berührt die Null mit zwei ihrer Quadrate die Eins. Die Eins berührt mit drei ihrer Quadrate die Quadrate ihrer Nachbarn (mit zweien die Null und mit einem die Zwei), und so weiter. Die Neun berührt schließlich mit vier Quadraten ihren Nachbarn (die Acht).

Multipliziert man nun in einer vorliegenden Konfiguration jede Zahl mit der Anzahl der berührenden Quadrate und summiert alles auf, so erhält man für diese Konfiguration den „Score". In unserem Falle ist dies

$$0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 7 + 5 \cdot 8 + 6 \cdot 5 + 7 \cdot 6 + 8 \cdot 9 + 9 \cdot 4 = 277.$$

Finden Sie ein IP-Modell, dessen Optimallösung eine Umsortierung der Ziffern mit maximalem bzw. minimalem Score liefert. Geben Sie eine Optimallösung – sowohl für das Minimum als auch für das Maximum – an (Optimierungssoftware ist ausdrücklich erlaubt).