Diskrete Optimierung
9. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
Dipl.-Math. Madeline Lips

SoSe 2013
11. und 13. Juni 2013

Gruppenübung

Aufgabe G1 (TDI)
Beweisen Sie folgende Aussage aus der Vorlesung:
Sei $P = P(A, b)$ mit A ganzzahlig und $Ax \leq b$ TDI. Sei ferner $F = \{x \mid Ax \leq b, ax = \beta\}$ mit a ganzzahlig und $\beta \in \mathbb{Z}$ eine Seite von P. Dann ist $Ax \leq b, ax = \beta$ TDI.

Aufgabe G2 (Gültige Ungleichungen)

(a) Sei $P_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{Z} \mid x + y \geq b\}$ und $f = b - \lfloor b \rfloor$. Zeigen Sie, dass die Ungleichung

$$x \geq f \cdot (\lceil b \rceil - y)$$

gültig für P_1 ist.

(b) Sei $P_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{Z} \mid y \leq b + x\}$ und $f = b - \lfloor b \rfloor$. Zeigen Sie, dass die Ungleichung

$$y \leq \lfloor b \rfloor + \frac{x}{1 - f}$$

gültig für P_2 ist.

Aufgabe G3 (Chvátal)
Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Skizzieren Sie das Polyeder P.

(b) Bestimmen Sie $P^1, \ldots, P^t$ (siehe Vorlesung), sodass $P^t = P_I$ gilt, und zeichnen Sie die Polyeder $P^1, \ldots, P^t$ in die Skizze ein.

Hausübung

Aufgabe H1 (Gültige Ungleichungen) (5 Punkte)
Sei $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{Z}_+^2 \mid a_1 y_1 + a_2 y_2 \leq b + x\}$ mit $a_1, a_2, b \in \mathbb{R}$ und $b \notin \mathbb{Z}$. Sei weiterhin $f = b - \lfloor b \rfloor$ und $f_i = a_i - \lfloor a_i \rfloor$ für $i = 1, 2$.

Zeigen Sie, dass die Ungleichung

$$\lfloor a_1 \rfloor y_1 + \left(\lfloor a_2 \rfloor + \frac{f_2 - f}{1 - f} \right) y_2 \leq \lfloor b \rfloor + \frac{x}{1 - f}$$

gültig für P ist.

Aufgabe H2 (Chvátal) (5 Punkte)
Gegeben sei die Familie ganzzahliger Programme mit $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{lrcrcl}
\max & & & x_2 & & \\
\text{s.t.} & kx_1 & + & x_2 & \leq & k \\
& -kx_1 & + & x_2 & \leq & 0 \\
& & & x_1, x_2 & \geq & 0 \\
& & & x_1, x_2 & \in & \mathbb{Z}
\end{array}$$

mit den zugehörigen Polyedern P_k.

(a) Zeigen Sie, dass P_k^1 durch das folgende System beschrieben wird:

$$\begin{array}{lrcrcl}
\max & & & x_2 & & \\
\text{s.t.} & (k-1)x_1 & + & x_2 & \leq & k-1 \\
& -(k-1)x_1 & + & x_2 & \leq & 0 \\
& & & x_1, x_2 & \geq & 0 \\
& & & x_1, x_2 & \in & \mathbb{Z}.
\end{array}$$

(b) Benutzen Sie die Ergebnisse aus Teil (a), um zu zeigen, dass in diesem Beispiel die Zahl t mit $t = \min_{s \in \mathbb{N}} P_k^s = (P_k)_I$ exponentiell in der Kodierungslänge der Eingabe (A, b) ist.

Aufgabe H3 (Modellierung) (5 Punkte)
Betrachten Sie das bekannte Puzzle Sudoku:

Sudoku	
Instanz:	$m \in \mathbb{N}, n = m^2$ und das $(n \times n)$-*Sudoku-Feld*, welches in Teilfelder der Größe $m \times m$ unterteilt ist, sowie eine Vorbelegung einiger Einträge des Sudoku-Feldes mit Werten aus $\{1, 2, \ldots, n\}$.
Frage:	Gibt es zu der gegebenen Vorbelegung eine Vervollständigung des Sudoku-Feldes mit den Werten von 1 bis n, so dass in keiner Zeile, keiner Spalte und keinem der n Teilfelder ein Wert mehrfach vorkommt?

Formulieren Sie Sudoku als ganzzahliges lineares Programm (bzw. binäres Programm).