Diskrete Optimierung
8. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Michael Joswig
Dipl.-Math. Madeline Lips

SoSe 2013
4. und 6. Juni 2013

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Modellierung)
Modellieren Sie die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ jeweils als zulässigen Bereich eines gemischt-ganzzahligen linearen Programms:

(a) $M_1 = \{(1,1), (2,3), (3,1), (4,2)\}$
(b) $M_2 = ([0,1] \times \{1\}) \cup ([1,2] \times \{3\}) \cup ([2,3] \times \{2\}) \cup ([3,4] \times \{3\})$
(c) $M_3 = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -3 \leq x_1 \leq 3,\ |x_1| \leq x_2 \leq |x_1| + 1\right\}$

Aufgabe G2
Geben Sie ein Beispiel an, sodass $Ax \leq b$ für $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{Q}^m$ ein TDI-System, allerdings $2Ax \leq 2b$ kein TDI-System ist.

Aufgabe G3 (Eigenschaften des Stabile-Mengen-Polytops)
Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $|V| = n$ und $P(G)$ das zugehörige Stabile-Mengen-Polytop, d. h.

$$P(G) = \operatorname{conv}\{x \in \{0,1\}^n \mid x_i + x_j \leq 1 \ \forall (i,j) \in E\}.$$

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $P(G)$ ist volldimensional.
(b) $P(G)$ ist *submonoton*, das heißt $x \in P(G)$ impliziert $y \in P(G)$ für alle $0 \leq y \leq x$. Alle nichttrivialen Facetten von $P(G)$ haben nichtnegative Koeffizienten, das heißt, wenn $a^T x \leq \alpha$ eine facettendefinierende Ungleichung ist, gilt $a \geq 0$. Nichttriviale Facetten sind diejenigen, die *nicht* durch die Ungleichung $x_j \geq 0$ induziert werden.
(c) Die Nichtnegativitätsbedingungen $x_j \geq 0$ induzieren Facetten von $P(G)$.

Aufgabe G4
Ein Mobilfunkanbieter betreibt deutschlandweit ein Netz von n Antennen. Jede Antenne empfängt Signale einer bestimmten Frequenz. Dem Mobilfunkanbieter stehen m verschiedene Frequenzen zur Verfügung, die den Antennen zugewiesen werden müssen.

Bei der Frequenzzuweisung müssen folgende Bedingungen eingehalten werden:

- Beträgt die (euklidische) Distanz zwischen zwei Antennen weniger als D_0 km, darf diesen beiden Antennen nicht dieselbe Frequenz zugewiesen werden.

(a) Formulieren Sie das Problem, eine Frequenzzuweisung zu finden, als gemischt ganzzahliges Programm.
(b) Erweitern Sie ihr Modell folgendermaßen und finden Sie eine kostenminimale Frequenzzuweisung:
  - Bei einer Distanz zwischen D_0 und $D_1 > D_0$ km darf zwar dieselbe Frequenz zugewiesen werden, die dabei auftretenden Interferenzen verursachen jedoch Kosten von c Geldeinheiten pro Paar von interferierenden Antennen.
  - Bei einer Distanz von mehr als D_1 km dürfen beide Antennen mit der selben Frequenz betrieben werden, ohne dass zusätzliche Kosten entstehen.

(c) Für Antennen, welche in Ländergrenznähe stehen, kann es Einschränkungen hinsichtlich der zuweisbaren Frequenzen geben. D. h. für jede Antenne in einem Grenzgebiet gibt es eine Teilmenge von $\{1, \ldots, m\}$ der für diese Antenne zulässigen Frequenzen.

    Erweitern Sie Ihr Modell aus (b) derart, dass dieser Sachverhalt mit berücksichtigt wird.

Hausübung

Aufgabe H1 (5 Punkte)

Für $n \geq 1$ betrachten Sie das Ungleichungssystem

$$\sum_{i \in I} x_i - \sum_{i \notin I} x_i \leq |I| - 1 \qquad \forall I \subseteq \{1, \ldots, n\}. \tag{1}$$

(a) Skizzieren Sie das Polytop für $n = 2$ und $n = 3$.

(b) Zeigen Sie, dass (1) keine ganzzahlige Lösung hat.

(c) Zeigen Sie, dass jedes Ungleichungssystem, das man erhält, indem man mindestens eine Ungleichung aus (1) streicht, eine ganzzahlige Lösung hat.

Aufgabe H2 (5 Punkte)

In dieser Aufgabe betrachten wir folgendes kombinatorisches Optimierungsproblem:

CARDINALITY-BIPARTITE-MATCHING-Problem

Instanz: Graph $G = (V, E)$ mit $X, Y \subset V$, so dass $V = X \cup Y$, $X \cap Y = \emptyset$ und $E \subseteq \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$.

Frage: Finde eine Kantenmenge $M \subseteq E$, so dass keine zwei Kanten aus M einen gemeinsamen Endknoten haben und $|M|$ maximal ist.

Eine Studentin ist eine Woche zu Besuch in Berlin, um sich in dieser Zeit auf der Berlinale folgende Filme anzuschauen, die jedoch nur an den ausgewiesenen Tagen vorgestellt werden. Sie möchte so viele Filme wie möglich, allerdings maximal einen pro Tag sehen.

Film	**Vorstellungstage**
Skagafjördur	Montag, Samstag
The Garden	Montag, Samstag, Sonntag
Forty Shades of Blue	Montag, Dienstag, Mittwoch
Gender X	Montag, Freitag
Abordage	Mittwoch, Donnerstag
Wer ist Helene Schwarz?	Dienstag
Heaven‘s Gate	Freitag, Sonntag

(a) Stellen Sie dieses MATCHING-Problem als bipartiten Graphen dar.

(b) Formulieren Sie
- das ganzzahlige lineare Programm (ILP),
- das relaxierte lineare Programm (ohne die Ganzzahligkeitsbedingungen) (LP),
- das duale Programm zu (LP)

sowohl allgemein als auch für die obige Instanz.

(c) Berechnen Sie (z. B. mithilfe von **CPLEX**) die Optima für die in ((b)) formulierten Programme.

(d) Wie lässt sich das duale Problem graphentheoretisch interpretieren?

Aufgabe H3 (5 Punkte)

(a) Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Sei

$$P = \operatorname{conv}\{x \in \{0,1\}^{|E|} \mid x \text{ ist ein Matching von } G\}$$

das Matching-Polytop von G und

$$P' := \left\{ x \in \mathbb{R}^{|E|} \mid \forall e \in E:\ x_e \geq 0, \forall v \in V: \sum_{\{e \in E \mid v \in e\}} x_e \leq 1 \right\}$$

die Lösung des relaxierten Ungleichungssystems.

Zeigen Sie: Ist G bipartit, so gilt $P = P'$.

(b) Visualisieren Sie mithilfe von **polymake** die Matching-Polytope für zusammenhängende Graphen mit genau drei Kanten.