Diskrete Optimierung
7. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Michael Joswig
Dipl.-Math. Madeline Lips

SoSe 2013
28. Mai 2013

ACHTUNG: Die Übung am Donnerstag (30.05.2013) fällt aus. Gegebenenfalls können Sie in dieser Woche eine Übungsgruppe an einem anderen Tag besuchen.

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Unimodulare Transformationen)
Zeigen Sie:
Die elementaren Zeilen- und Spaltenoperationen entsprechen unimodularen Transformationen des Zeilen- bzw. Spaltenraumes.

Aufgabe G2 (TDI)
Zeigen Sie, dass eine ganzzahlige Matrix A genau dann total unimodular ist, wenn das System $Ax \leq b$, $x \geq 0$ für jeden Vektor b TDI ist.

Aufgabe G3 (Hermitesche Normalform)
Geben Sie alle Lösungen des linearen diophantischen Systems $Ax = b,\ x \in \mathbb{Z}^5$ an, wobei

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 & 8 \\ 9 & 1 & 5 & 6 & 8 \\ 4 & 2 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \text{ und } b := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie hierzu die Hermitesche Normalform H von A und geben Sie die unimodulare Matrix U an, sodass $AU = H$.

Aufgabe G4 (Modellierung)
Geben Sie unendlich viele Ungleichungsbeschreibungen eines 3-dimensionalen Rucksackproblems Ihrer Wahl an, sodass diese TDI sind und weisen Sie diese Eigenschaft nach.

Hausübung

Aufgabe H1 (TDI) (5 Punkte)
Gegeben sei das Polyeder

$$P = \operatorname{conv}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Bestimmen Sie ein Ungleichungssystem $Ax \leq b$ mit A und b ganzzahlig, welches TDI ist, so dass $P = \{x \mid Ax \leq b\}$.

Aufgabe H2 (5 Punkte)
Sei $a \in \mathbb{Z}^n$, $\alpha \in \mathbb{Z}$ und $P_I := \operatorname{conv}\{x \in \mathbb{Z}^n \mid a^T x \leq \alpha\}$. Weiter sei $k = \gcd(a_1, \ldots, a_n)$ der größte gemeinsame Teiler der Komponenten von a.

Zeigen Sie mit Hilfe des ganzzahligen Analogon des Farkas-Lemmas (siehe Vorlesung), dass

$$P_I = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{k} x_i \leq \left\lfloor \frac{\alpha}{k} \right\rfloor \right\}.$$

Hinweis: Betrachten Sie die folgenden beiden Mengen:

$$Q := \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x \leq \alpha\} \qquad \textit{und} \qquad R := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \frac{1}{k} a^T x \leq \left\lfloor \frac{\alpha}{k} \right\rfloor \right\}.$$

Aufgabe H3 (TDI) (5 Punkte)

(a) Sei $a \in \mathbb{Z}^n$ ein ganzzahliger Vektor und $\beta \in \mathbb{Q}$ eine rationale Zahl. Zeigen Sie, dass die Ungleichung $ax \leq \beta$ genau dann TDI ist, wenn die Einträge von a teilerfremd sind.

(b) Sei $Ax \leq b$ TDI, $k \in \mathbb{N}$ und $\alpha > 0$ eine rationale Zahl. Zeigen Sie, dass $\frac{1}{k}Ax \leq \alpha b$ ebenfalls TDI ist.