Diskrete Optimierung
6. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Michael Joswig
Dipl.-Math. Madeline Lips

SoSe 2013
21. und 23. Mai 2013

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Dominating Set)
Definition *Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Eine Teilmenge D der Knotenmenge V heißt* **dominierende Menge** *(dominating set), falls jeder Knoten aus $V \setminus D$ mit mindestens einem Knoten aus D benachbart ist.*

Betrachten Sie folgendes Entscheidungsproblem:

DOMINATING SET	
Instanz:	Graph $G = (V, E)$ ungerichtet, $k \in \mathbb{N}$.
Frage:	Hat G eine *dominierende Menge* der Größe k?

Zeigen Sie:

(a) VERTEX COVER $\leq_p$ DOMINATING SET

(b) DOMINATING SET $\leq_p$ VERTEX COVER

Aufgabe G2 ((s, t)-Schnitt)
Beweisen Sie folgenden Satz aus der Vorlesung:
Sei $(D'; s, t)$ ein Netzwerk und $\delta^-(U)$ wie in der Vorlesung definiert. Dann ist $\delta^-(U)$ ein (s, t)-Schnitt.

Aufgabe G3 (Modellierung)
Gegeben sei eine Menge $M \subseteq A \times B \times C$ mit $|A| = |B| = |C| = q$ und ein Gewichtsfunktion $w : M \to \mathbb{R}$. Gesucht ist eine gewichtsmaximale Teilmenge $M' \subseteq M$, sodass jedes Element aus A, B und C in jeweils höchstens einem Element aus M' vorkommt (drei dimensionales Matching Problem). Modellieren Sie dieses Problem als binäres Programm.

Hausübung

Aufgabe H1 (Ganzzahlige Polyeder) (5 Punkte)
Entscheiden und begründen Sie, ob die folgenden Polyeder ganzzahlig sind.

$$P_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \qquad P_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x_i \geq 0, i = 1, \ldots, 4 \right\}$$

Aufgabe H2 (Ungerade Kreise) (5 Punkte)
Sei $G = (V, E)$ ein Graph und C ein ungerader Kreis in G. Betrachten Sie das lineare Programm

$$\max\{c^T x \mid 0 \leq x,\ x_i + x_j \leq 1\ \forall \{i, j\} \in E\}$$

mit $c = \chi^{V(C)}$.
Zeigen Sie:

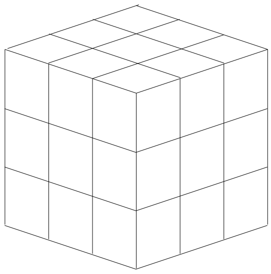
(a) $x_i^* = \frac{1}{2}$ für alle Knoten $i \in V(C)$, $x_i^* = 0$ für $i \notin V(C)$, löst das lineare Programm.

(b) x^* ist keine Konvexkombination von Inzidenzvektoren von stabilen Mengen in G.

Aufgabe H3 (Modellierung) (5 Punkte)

27 kleine Würfel sollen zu einem großen $(3 \times 3 \times 3)$-Würfel (siehe Abbildung) zusammengesetzt werden. In dem großen Würfel nennen wir drei kleine Würfel eine *Linie*, falls sie parallel zu einer Kante des großen Würfels aufgereiht liegen, eine Diagonale parallel zu einer der Seitenflächen des großen Würfels bilden, oder eine Raumdiagonale in dem großen Würfel bilden.

Wie viele Linien gibt es?



Wir suchen nun eine Anordnung von 13 kleinen weißen und 14 kleinen schwarzen Würfeln mit möglichst wenigen Linien, welche aus gleichfarbigen Würfeln bestehen.

Formulieren Sie ein ganzzahliges Programm zur Lösung dieses Problems und bestimmen Sie (bspw. mit **CPLEX**) eine Optimallösung.