Diskrete Optimierung
5. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Michael Joswig
Dipl.-Math. Madeline Lips

SoSe 2013
14. und 16. Mai 2013

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Hinreichendes Kriterium für totale Unimodularität)
Zeigen Sie folgendes hinreichendes Kriterium für totale Unimodularität:
Eine Matrix $A \in \{0, \pm 1\}^{m \times n}$ ist total unimodular, falls

- höchstens zwei Einträge in jeder Spalte ungleich 0 sind,
- die Zeilen in zwei disjunkte Mengen I_1, I_2 aufgeteilt werden können, sodass:
  - Hat eine Spalte zwei Einträge mit gleichen Vorzeichen, so liegen die entsprechenden Zeilen in verschiedenen I_j.
  - Hat eine Spalte zwei Einträge mit verschiedenen Vorzeichen, so liegen die entsprechenden Zeilen in gleichen I_j.

Aufgabe G2 (Totale Unimodularität)
Sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Zeigen Sie:

(a) A ist genau dann total unimodular, wenn $[A, I]$ unimodular ist.

(b) A ist genau dann total unimodular, wenn $\begin{bmatrix} A \\ -A \\ I \\ -I \end{bmatrix}$ total unimodular ist.

(c) A ist genau dann total unimodular, wenn A^T total unimodular ist.

Aufgabe G3 (Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix)
Zeigen Sie, dass die Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix eines ungerichteten bipartiten Graphen total unimodular ist.

Hinweis: Ein Graph $G = (V, E)$ heißt bipartit, *falls $X, Y \neq \emptyset$ existieren mit $V = X \dot\cup Y$ und $E \subseteq \{\{v, w\} \mid v \in X, w \in Y\}$.*
Die Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix *von G ist die Matrix $A = (a_{ij})_{i \in V, j \in E}$ mit*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i \in j, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hausübung

Aufgabe H1 (Totale Unimodularität) (5 Punkte)
Sei $A \in \{0, 1\}^{m \times n}$. Zeigen Sie, dass wenn die Zeilen von A so angeordnet werden können, dass in jeder Spalte von A die Einsen konsekutiv auftreten, A total unimodular ist.

Aufgabe H2 (Total unimodulare Matrizen) (5 Punkte)
Entscheiden Sie, ob die folgenden Matrizen total unimodular sind und begründen Sie Ihre Antwort.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H3 (Modellierung) (5 Punkte)

Gegeben sei folgendes Optimierungsproblem:

EQUALITY-KNAPSACK

Instanz: $a_i, w_i \in \mathbb{R}_+$ mit $i = 1, \ldots, n$ $(n \in \mathbb{N})$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$.
Frage: Finde $x \in \mathbb{N}^n$, so dass $\sum_{i=1}^n a_i x_i$ maximal ist und $\sum_{i=1}^n w_i x_i = \lambda$ gilt.

(a) Berechnen Sie mit Hilfe von **CPLEX** ein Optimum für die Instanz I mit $n = 5$, $a = (213, -1928, -11111, -2345, 9123)$, $w = (12223, 12224, 36674, 611, 85569)$ und $\lambda = 89643482$.

(b) Betrachten Sie nun das entsprechende relaxierte UNBOUNDED-KNAPSACK-Problem, d. h. $\sum_{i=1}^n w_i x_i \leq \lambda$ und $x_i \in \mathbb{R}_+$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Stellen Sie für I das resultierende KNAPSACK-Polytop mit Hilfe von **polymake** graphisch dar.

Hierbei könnten die Funktionen/Methoden `facet`, `projection_full`, `projection`, `DUAL_GRAPH` und `VISUAL` hilfreich sein.

(c) Berechnen Sie mit Hilfe von **polymake** ein Optimum für das relaxierte Problem.

Hinweis: Sowohl **CPLEX** *als auch* **polymake** *sind in den Poolräumen im Mathebau installiert. Weitere Informationen finden Sie unter* `www-01.ibm.com/software/commerce/optimization/cplex-optimizer/` *und* `www.polymake.org/doku.php`.

Bitte drucken Sie Ihre Lösung zur Abgabe aus.