Diskrete Optimierung
4. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Michael Joswig
Dipl.-Math. Madeline Lips

SoSe 2013
7. Mai 2013

ACHTUNG: Die Übung am Donnerstag (09.05.2013) fällt aus. Gegebenenfalls können Sie in dieser Woche eine Übungsgruppe an einem anderen Tag besuchen.

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Wdh. Cramersche Regel)
Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulär und $b \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $Ax = b$ eindeutig lösbar mit $x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$ *(Cramersche Regel)*

wobei $A_i := \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$.

Lösen Sie folgendes lineares Gleichungssystem mit Hilfe der Cramerschen Regel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe G2 (Wdh. Wachstum von Funktionen)
Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Dann ist

$$f \in O(g) :\Longleftrightarrow \exists c > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : \ f(n) \leq c \cdot g(n)$$

(D.h. f wächst höchstens so stark wie g und g ist eine obere Schranke für f.)

$$f \in o(g) :\Longleftrightarrow \forall c > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : \ 0 \leq f(n) < c \cdot g(n)$$

(D.h. f wächst echt langsamer als g und g ist eine echte obere Schranke für f.)

(a) Seien $f(n) = 2n^2 + 7n - 10$ und $g(n) = n^2$. Zeigen Sie $f(n) \in O(g(n))$ und $g(n) \in O(f(n))$. Wie kann man c und n_0 jeweils wählen?

(b) Zeigen Sie:

$$f \in O(g(n)) \text{ und } g \in O(h(n)) \Rightarrow f \in O(h(n))$$

und

$$f \in o(g(n)) \text{ und } g \in o(h(n)) \Rightarrow f \in o(h(n)).$$

(c) Sortieren Sie die Funktionen

$$n^3, \ \sqrt{n}, \ n!, \ 2^n, \ n^n, \ n$$

nach aufsteigender Komplexität unter Verwendung der „O“- und „o“-Notation. Bestimmen Sie jeweils ein n_0.

Aufgabe G3 (Stable Set)
Definition *Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Eine Teilmenge S der Knotenmenge V heißt* **stabil** *(Stable Set), falls keine zwei Knoten in S durch eine Kante aus E verbunden sind.*

Betrachten Sie folgendes Entscheidungsproblem:

STABLE SET	
Instanz:	Graph $G = (V, E)$ ungerichtet, $k \in \mathbb{N}$.
Frage:	Hat G eine stabile Menge der Größe k?

Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass STABLE SET $\mathcal{NP}$-vollständig ist, indem das aus der Vorlesung bekannte Entscheidungsproblem SAT auf STABLE SET reduziert wird.

(a) Zeigen Sie: STABLE SET$\in \mathcal{NP}$, d. h. geben Sie ein Zertifikat für eine Ja-Instanz an.

(b) Betrachten Sie folgende Instanz I von SAT: m Klausen $Z_1, \ldots, Z_m$ mit $Z_i = y_{i_1} \vee \ldots \vee y_{i_{k_i}}$ mit Literalen y_{i_j} in Variablen $x_1, \ldots, x_n$. Konstruieren Sie (in polynomialer Zeit) einen Graphen G zu I und $k \in \mathbb{N}$, der genau dann eine stabile Menge der Größe k besitzt, wenn es für I eine erfüllende Belegung gibt.

Hausübung

Aufgabe H1 (Polyederbeschreibung) (5 Punkte)
Geben Sie ein Verfahren an, welches angewendet auf $P = \operatorname{conv} V \subset \mathbb{R}^n$ eine Ungleichungsbeschreibung für P liefert und erläutern Sie die Korrektheit Ihres Verfahrens.

Aufgabe H2 (Facettenkomplexität) (5 Punkte)
Beweisen Sie folgenden Satz aus der Vorlesung:
Sei $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ein rationales Polyeder der Facettenkomplexität φ. Dann hat P_I Facettenkomplexität $\leq 24n^5\varphi$.

Aufgabe H3 (Vertex Cover) (5 Punkte)
Definition *Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Eine Teilmenge S der Knotenmenge V heißt* **Knotenüberdenkung** *(Vertex Cover), falls jede Kante aus E mit mindestens einem Knoten in S inzident ist.*

Ein Entscheidungsproblem Π ist in **Polynomialzeit** *auf ein Entscheidungsproblem Π'* **reduzierbar** **($\Pi \leq_P \Pi'$)**, *falls es eine in Polynomialzeit berechenbare Funktion f gibt, die Eingaben für Problem Π in Eingaben für Problem Π' überführt und folgendes erfüllt: $x \in \Pi \Leftrightarrow f(x) \in \Pi'$.*

Betrachten Sie folgendes Entscheidungsproblem:

VERTEX COVER	
Instanz:	Graph $G = (V, E)$ ungerichtet, $m \in \mathbb{N}$.
Frage:	Hat G ein *Vertex Cover* der Größe m?

Zeigen Sie:

(a) VERTEX COVER$\leq_p$ STABLE SET

(b) STABLE SET$\leq_p$ VERTEX COVER