Diskrete Optimierung
3. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Michael Joswig
Dipl.-Math. Madeline Lips

SoSe 2013
30. April und 2. Mai 2013

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Doppelte Beschreibung (1))

(a) Beweisen Sie folgendes Lemma.

Lemma: *Sei V eine endliche Punktmenge und $P = \operatorname{conv} V$. Schneiden wir das Polytop nun mit einem weiteren affinen Halbraum H^+. Sei V_0, V_+, V_- die Partition der Menge V, die durch $V_0 = V \cap H$, $V_+ = V \cap H^+ \setminus H$, $V_- = V \cap H^- \setminus H$ definiert ist. Dann gilt*

$$P \cap H^+ = \operatorname{conv}((V_0 \cup V_+) \cup \{[v,w] \cap H : v \in V_+, w \in V_-\}).$$

Wobei $[v,w] = \{\lambda v + (1-\lambda)w | 0 \leq \lambda \leq 1\}$ die Strecke von v nach w ist.

(b) Gegeben sei folgender Algorithmus:

Algorithm 1 Grundalgorithmus der doppelten Beschreibung

INPUT: Menge affiner Halbräume $\mathscr{H} = \{H_1^+, \ldots, H_m^+\}$ in $\mathbb{R}^n$, so dass $P = H_1^+ \cap \ldots \cap H_m^+$ beschränkt und volldimensional sowie $P_{n+1} = H_1^+ \cap \ldots \cap H_{n+1}^+$ ein n-Simplex ist.
OUTPUT: Punktmenge V mit $\operatorname{conv} V = P$

1: $V_{n+1} \leftarrow$ Eckenmenge von P_{n+1}
2: **for** $k \leftarrow n+2, \ldots, m$ **do**
3: Konstruiere V_k mit $\operatorname{conv} V_k = P_k = P_{k-1} \cap H_k^+$ wie in obigen Lemma
4: **end for**
5: **return** V_m

Zeigen Sie, dass Algorithmus 1 korrekt ist. Wie kann Schritt 1 realisiert werden?

(c) Wenden Sie Algorithmus 1 auf folgendes Polytop an:

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \\ -2 & -1 \\ 1 & 1 \\ -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -32 \\ 6 \\ -20 \\ -14 \end{pmatrix} \right\}$$

Verdeutlichen Sie zeichnerisch das Verfahren des Algorithmus.

Aufgabe G2 (Doppelte Beschreibung (2))

Überlegen Sie sich eine Modifizierung von Algorithmus 1 aus Aufgabe G1 für unbeschränkte Polyeder.

Hilfestellung: Homogenisieren Sie Ihr Ausgangsproblem, so dass Sie einen $n+1$-dimensionalen polyedrischen Kegel erhalten. Anschließend sind Sie an E, so dass $P = \operatorname{cone} E$, interessiert.

Aufgabe G3 (Modellierung MST)

Gegeben sei ein zusammenhängender, ungerichteter Graph $G = (V, E)$ mit einer Kantengewichtsfunktion $w : E \longrightarrow \mathbb{R}$.

Gesucht ist ein minimaler aufspannender Baum von G, d. h. eine Kantenmente $T \subseteq E$ mit $w(T) = \min_{S \subseteq E} w(S)$, wobei $G_T = (V, T)$ zusammenhängend und kreisfrei ist.

Formulieren Sie ein ganzzahliges Programm zur Modellierung dieses Problems.

Hausübung

Aufgabe H1 (Zerlegung eines Polyeders) (5 Punkte)

(a) Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe G2, dass für jedes Polyeder $P \subseteq \mathbb{R}^n$ endliche Mengen $V, E \in \mathbb{R}^n$ existieren, so dass $P = \operatorname{conv} V + \operatorname{cone} E$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass sich jedes Polyeder $P \subseteq \mathbb{R}^n$ darstellen lässt als $P = Q + (K + L)$, wobei Q ein Polytop, K ein spitzer Kegel und L ein linearer Unterraum ist. Welche Summanden sind in dieser Darstellung eindeutig bestimmt?

Aufgabe H2 (Rucksackproblem) (5 Punkte)

Gegeben sei die Rucksack-Ungleichung $\sum_{i=1}^n a_i x_i \leq b$.
Betrachtet werden die beiden Polytope

$$P := \operatorname{conv} \left\{ x \in [0,1]^n \mid \sum_{i=1}^n a_i x_i \leq b \right\} \quad \text{und}$$
$$S := \operatorname{conv} \{ x \in \{0,1\}^n \mid x \text{ ist eine Lösung des gegebenen Rucksackproblems} \}.$$

(a) Zeigen Sie: $S \subset P$.

(b) Gilt auch $P \subset S$? Beweis oder Gegenbeispiel.

Aufgabe H3 (Kegelbasis) (5 Punkte)

Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Kegel (nicht zwingend *polyedrischer* Kegel). Eine Menge $S \subseteq C$ heißt *Erzeugendensystem* für C, falls $\operatorname{cone}(S) = C$. Ist S minimal (bzgl. Mengeninklusion), so heißt S *Kegelbasis*.

(a) Geben Sie zwei Kegelbasen des $\mathbb{R}^2$ unterschiedlicher Kardinalität an.

(b) Zeigen Sie: Eine Menge S ist genau dann eine Kegelbasis für einen Kegel C, wenn $\operatorname{cone}(S) = C$ und $s \notin \operatorname{cone}(S - \{s\})$ für alle $s \in S$ gilt.

(c) Gibt es im $\mathbb{R}^n$ Kegel mit Kegelbasen unendlicher Kardinalität? Belegen Sie Ihre Antwort mit einem Beispiel/Beweis.