Diskrete Optimierung
2. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Michael Joswig
Dipl.-Math. Madeline Lips

SoSe 2013
23. und 25. April 2013

Gruppenübung

Aufgabe G1 (ganzzahlige Hülle)
Gegeben sei das Polyeder $P \subset \mathbb{R}^2$ durch

$$\begin{aligned} -10x_1 - 6x_2 &\leq -15 \\ 2x_1 + 6x_2 &\leq 15 \\ 6x_1 - 4x_2 &\leq 9. \end{aligned}$$

(a) Skizzieren Sie P in der Ebene und markieren Sie alle ganzzahligen Punkte in P. (Wählen Sie einen nicht zu kleinen Maßstab.)

(b) Bestimmen Sie zeichnerisch $P_I := \operatorname{conv}(P \cap \mathbb{Z}^2)$.

(c) Geben Sie eine Menge von Ungleichungen an, die P_I beschreibt.

Aufgabe G2 (kartesisches Produkt zweier Polyeder)
Seien $N \subset \mathbb{R}^n$ und $M \subset \mathbb{R}^m$ zwei Polytope mit den Eckenmengen $\operatorname{Vert}(N)$ und $\operatorname{Vert}(M)$ sowie den Facettenmengen $\mathscr{F}(N)$ und $\mathscr{F}(M)$.

(a) Zeigen Sie, dass das (kartesische) Produkt $N \times M := \{(n,m) \mid n \in N, m \in M\} \subset \mathbb{R}^{n+m}$ wiederum ein Polytop ist.

(b) Geben Sie die Ecken $\operatorname{Vert}(N \times M)$ und Facetten $\mathscr{F}(N \times M)$ von $N \times M$ an.

Aufgabe G3 (rationale Polyeder)
Sei P ein rationales Polyeder. Dann sind äquivalent:

(a) $P = P_I$

(b) Jede Seitenfläche von P enthält einen ganzzahligen Punkt.

(c) Jede minimale Seitenfläche von P enthält einen ganzzahligen Punkt.

(d) $\max\{c^T x \mid x \in P\}$ wird von einem ganzzahligen Punkt angenommen für alle $c \in \mathbb{R}^n$, für die das Maximum endlich ist.

Hausübung

Aufgabe H1 (Hypersimplex) (5 Punkte)
Für $1 \leq k \leq d$ ist der *Hypersimplex* $\Delta_d(k)$ definert durch

$$\Delta_d(k) := \{x \in [0,1]^d \mid x_1 + x_2 + \ldots + x_d = k\}.$$

$\Delta_d(1)$ ist ein $(d-1)$-dimensionaler Simplex im $\mathbb{R}^d$.
Bestimmen Sie die f-Vektoren von $\Delta_3(2)$, $\Delta_4(2)$ und die Anzahl der Ecken und Facetten von $\Delta_5(2)$.
Hinweis: Zur Lösung dieser Aufgabe ist es erlaubt, `polymake` *zu benutzen.*

Aufgabe H2 (Hilbertbasis) (5 Punkte)

(a) Betrachten Sie den Kegel $C \subset \mathbb{R}^2$, der gegeben ist durch

$$\begin{aligned} x_1 - 5x_2 &\leq 0 \\ -7x_1 - 3x_2 &\leq 0. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie zeichnerisch eine minimale, ganzzahlige Hilbertbasis von C.

(b) Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ ein rationaler, polyedrischer und spitzer Kegel und sei $H(C)$ die eindeutige minimale, ganzzahlige Hilbertbasis des Kegels C. Weiterhin sei $F \subseteq C$ eine nichtleere Seitenfläche des Kegels C.
Zeigen Sie: $H(F) := F \cap H(C)$ ist die eindeutige minimale, ganzzahlige Hilbertbasis von F.

Aufgabe H3 (Zonotope) (5 Punkte)
Ein *Zonotop* Z ist die Minkowskisumme von Streckenabschnitten:

$$\begin{aligned} Z &= [p_1, q_1] + [p_2, q_2] + \cdots + [p_k, q_k] \\ &= \{r_1 + r_2 + \ldots + r_k \mid r_i \in [p_i, q_i]\}. \end{aligned}$$

Ziel dieser Aufgabe ist es, andere Darstellungsweisen von Zonotopen kennenzulernen.

(a) Zeigen Sie, dass ein Zonotop das Bild einer affinen Projektion des Einheitswürfels ist.

(b) Zeigen Sie, dass jedes Zonotop zentralsymmetrisch ist und dass Seiten von Zonotopen wieder Zonotope sind.

(c) Geben Sie ein Polytop an, dass kombinatorisch äquivalent zum Würfel (d. h. die Seitenverbände sind isomorph), jedoch kein Zonotop ist.

(d) Betrachten Sie die folgende endliche Familie von linearen Hyperebenen:

$$\mathscr{A}_{\mathscr{V}} := \{H_1, \ldots, H_p\} \in \mathbb{R}^d, \text{ wobei } H_i := \{x \in \mathbb{R}^d : {v_i}^T x = 0\}$$

Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Seitenverband des Zonotops $Z = [-v_1, v_1] + [-v_2, v_2] + \cdots + [-v_p, v_p]$ und dem Hyperebenenarrangement $\mathscr{A}_{\mathscr{V}}$?