

Diskrete Optimierung

6. Übungsblatt



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Michael Joswig
Dipl.-Math. Madeline Lips

SoSe 2013

Gruppenübung

Lösung zur Aufgabe G1 (Dominating Set)

- (a) Um zu zeigen, dass DOMINATING SET ein schweres Problem ist, wollen wir zeigen, dass VERTEX COVER in Polynomialzeit auf DOMINATING SET reduzierbar ist.

Sei (G, k) eine Instanz von VERTEX COVER. Konstruiere einen Graphen $G' = (V', E')$ für eine Instanz von DOMINATING SET wie folgt.

- erweitere G durch Hinzufügen eines neuen Knoten für jede Kante $\{u, v\} \in E$ und verbinde ihn mit den Knoten u und v
- entferne alle Knoten ohne Nachbarn

Benötigte Zeit für die Transformation: $O(\#E + \#V)$, d.h. polynomial.

Behauptung: G besitzt genau dann ein Vertex Cover der Größe k , falls G' eine dominierende Menge der Größe k besitzt.

Beweis:

„ \Rightarrow “ Wir haben ein Vertex Cover S für die Instanz (G, k) gegeben. Wähle als dominierende Menge $D = S$. Betrachte bel. $x \in V'$. Falls $x \notin V$, dann existieren $u, v \in V$, $\{u, v\} \in E$, sodass x in G' mit u und v benachbart ist, da Kante $\{u, v\}$ in G durch S überdeckt wird, gilt $u \in S$ oder $v \in S$. Falls $x \in V$, dann besitzt x einen Nachbarn y in G , sodass die Kante $\{x, y\}$ durch S überdeckt wird. Also gilt $x \in S$ oder $y \in S$.

„ \Leftarrow “ Wir haben eine dominierende Menge D für die Instanz (G', k) gegeben. Konstruiere S (Vertex Cover für (G, k)) wie folgt. Falls $d \in D \cap V$, dann füge d zu S hinzu. Falls $d \in D \setminus V$, dann entspricht d einer Kante $\{u, v\} \in E$, füge u oder v zu S hinzu und fülle S gegebenenfalls mit beliebigen weiteren Knoten auf, bis $\#S = \#D = k$ gilt.

Zusammengefasst heißt das:

Betrachte das Entscheidungsproblem VERTEX COVER für die Instanz (G, k) . Für dieses haben wir ein dazugehöriges Zertifikat, d.h. ein Vertex Cover ($=: S$) der Größe k . Anschließend führen wir obige Transformation aus, sodass wir in Polynomialzeit eine Instanz (G', k) für das Entscheidungsproblem DOMINATING SET erhalten. Wie in obigen Beweis gezeigt, kann man aus dem Zertifikat (S) von VERTEX COVER ein Zertifikat ($=: D$) für DOMINATING SET konstruieren. Außerdem kann man aus einem Zertifikat für DOMINATING SET mit der Instanz (G', k) ein Zertifikat für VERTEX COVER mit der Instanz (G, k) konstruieren.