Lineare Algebra für Physiker
9. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Matthias Schneider
Dr. Silke Horn
Dipl.-Math. Dominik Kremer

SS 2013
18./21. Juni 2013

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Eigenwerte und Eigenvektoren)
Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden reellwertigen Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe G2 (Eigenwerte beim Transponieren)

(a) Sei A eine quadratische Matrix über $\mathbb{R}$. Beweisen oder widerlegen Sie, dass A und A^T die gleichen Eigenwerte haben.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie, dass A und A^T die gleichen Eigenvektoren haben.

Aufgabe G3 (Eigenwerte des Shift-Operators)
Wir betrachten den Raum $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ aller reellen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und die Abbildung

$$S : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}.$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume von S.

Aufgabe G4 (Eigenwerte von Drehmatrizen)

(a) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie die (eventuell komplexen) Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

(b) Berechnen Sie die (eventuell komplexen) Eigenwerte der Matrix einer Drehung im $\mathbb{R}^2$ um den Koordinatenursprung um einen Winkel $\varphi \in \mathbb{R}$.

Hausübung

Aufgabe H1 (Eigenwerte beim Invertieren) (6 Punkte)

(a) Sei v ein Eigenvektor der invertierbaren Matrix A zum Eigenwert λ. Zeigen Sie, dass v dann auch Eigenvektor von A^{-1} zum Eigenwert λ^{-1} ist.

(b) Sei v ein Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert λ und s ein Skalar. Zeigen Sie, dass v ein Eigenvektor von $A-sE$ zum Eigenwert $\lambda - s$ ist.

(c) Bestimmen Sie die Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H2 (Rang einer linearen Abbildung) (6 Punkte)
Bestimmen Sie den Rang der linearen Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 4x_4 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 11x_4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 + x_4 \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 10x_4 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie außerdem Basen von Kern φ und Bild φ an.

Aufgabe H3 (Potenzen linearer Abbildungen) (6 Punkte)
Gegeben sei die lineare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2iy \\ x + 2y + iy \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine explizite Darstellung von $\varphi^n(e_1) = (\underbrace{\varphi \circ \ldots \circ \varphi}_{n \text{ mal}})(e_1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei $e_1 = (1, 0)^T$.

Tipp: Beschreiben Sie φ bezüglich einer Basis aus Eigenvektoren.