Lineare Algebra für Physiker
8. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Matthias Schneider
Dr. Silke Horn
Dipl.-Math. Dominik Kremer

SS 2013
11./14. Juni 2013

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Dimensionsformel)
Zeigen Sie, dass es keine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ gibt mit

$$\operatorname{im} f = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right) \quad \text{und} \quad \ker f = \operatorname{span}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Aufgabe G2 (Basiswechsel)
Wir betrachten die $\mathbb{R}$-Vektorräume $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ mit den Basen

$$B = \left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) \quad \text{bzw.} \quad C = \left(\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$$

sowie den Standardbasen

$$E_2 = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) \quad \text{bzw.} \quad E_3 = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

Eine lineare Abbildung $\psi \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ ist gegeben durch

$${}_B\psi_C := \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 4 & 5\end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung ${}_{E_2}\psi_{E_3}$ von ψ bezüglich der Basen E_3 und E_2.

(b) Gegeben sei weiterhin ein Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ durch $v_{E_3} = \begin{pmatrix}6\\7\\8\end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\psi(v)_B$.

Aufgabe G3 (Injektivität und Surjektivität)
Es seien V und W endlichdimensionale Vektorräume und $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Ersetzen Sie in den folgenden drei Aussagen die Fragezeichen so, dass die Aussagen wahr sind, und beweisen Sie jeweils ihre Richtigkeit.

(a) φ ist surjektiv $\Leftrightarrow \dim(\operatorname{im}\varphi) = ?$

(b) φ ist injektiv $\Leftrightarrow \dim(\ker\varphi) = ?$

(c) φ ist bijektiv $\Leftrightarrow \dim V = ?$ und $\dim(\ker\varphi) = ?$

Betrachten Sie nun den $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{R} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$ der reellen Zahlenfolgen.

(d) Zeigen Sie dass es eine lineare Abbildung $\varphi_1 : V \to V$ gibt, die injektiv, aber nicht surjektiv ist.

(e) Zeigen Sie dass es eine lineare Abbildung $\varphi_2 : V \to V$ gibt, die surjektiv, aber nicht injektiv ist.

Aufgabe G4 (Determinante einer Abbildung)
Wir betrachten die folgende Abbildung:

$$f: M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R}), \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a-6b+4c+3d & 2b+c+3d \\ -3b+2d & d-b \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $\det f$.

Hausübung

Aufgabe H1 (Darstellung linearer Abbildungen) (6 Punkte)
Wir betrachten endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume V und W sowie eine lineare Abbildung $\varphi \in L(V,W)$. Zeigen Sie, dass dann Basen B von V und C von W existieren, bezüglich denen φ die Blockdarstellung

$${}_C\varphi_B = \left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

besitzt. Hierbei bezeichnet E eine Einheitsmatrix und 0 steht für Nullmatrizen geeigneter Dimension.

Aufgabe H2 (Basiswechsel im Polynomraum) (6 Punkte)
Wie üblich bezeichne $\mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ die Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad kleiner gleich n. Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi : \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_3(\mathbb{R}) \quad \text{mit } \varphi(p)(x) = xp(x),$$

die Elemente $p_i(x) = x^i$, $q_i(x) = (x-1)^i$ für $i = 0, 1, \ldots, 3$ und die Basen

$$\begin{aligned} B &= (p_0, p_1, p_2), \\ C &= (p_0, p_1, p_2, p_3), \\ C' &= (q_0, q_1, q_2, q_3) \end{aligned}$$

von $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ bzw. von $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$. Bestimmen Sie ${}_C\varphi_B$ und ${}_{C'}\varphi_B$.

Aufgabe H3 (Transponieren als lineare Abbildung) (6 Punkte)
Es sei $M_n(\mathbb{K})$ der Raum der $n \times n$-Matrizen über $\mathbb{K}$. Nehmen Sie $n = 2$ an und bestimmen Sie Spur und Determinante der linearen Abbildung

$$\varphi : M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K}), \quad A \mapsto A^T$$

Bonus: Bestimmen Sie Spur und Determinante bei beliebiger Dimension n.