Lineare Algebra für Physiker
7. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Matthias Schneider
Dr. Silke Horn
Dipl. Math. Dominik Kremer

SS 2013
4./7. Juli 2013

Gruppenübung

Aufgabe G1
Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Unterräumen U und W. Zeigen Sie:

(a) $U + W := \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$ ist ein Unterraum von V, die sogenannte *Summe* von U und W.

(b)
$$V = U \oplus W \qquad \Longleftrightarrow \qquad V = U + W \text{ und } U \cap W = \{0\}.$$

(c) Ist V endlichdimensional mit $V = U \oplus W$, so gilt $\dim V = \dim U + \dim W$.

Aufgabe G2
Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie:
$$\langle a \times b, c \times d \rangle = \langle a, c \rangle \langle b, d \rangle - \langle a, d \rangle \langle b, c \rangle$$

Aufgabe G3
Die lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ sei definiert durch
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ s \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - y + s + t \\ x + 2s - t \\ x + y + 3s - 3t \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension von $\operatorname{Bild} \phi$ und von $\ker \phi$.

Aufgabe G4
Die Berechnung einer Determinante kann als sehr effiziente Methode eingesetzt werden, um die lineare Unabhängigkeit von Vektoren oder die Invertierbarkeit einer Matrix zu zeigen. In dieser Aufgabe soll ein Zugang zum Verständnis dieser Methode gegeben werden.

(a) Das Kreuzprodukt zweier Vektoren des $\mathbb{R}^3$ hat als Betrag die Fläche, die das durch die Vektoren aufgespannte Parallelogramm aufspannt. Seien nun zwei Vektoren $a = \binom{a_1}{a_2}$ und $b = \binom{b_1}{b_2}$ aus $\mathbb{R}^2$ gegeben, Zeigen Sie, dass für die zwei Vektoren a, b gilt:
$$\left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \det \left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \right) \right|$$

(b) Zeigen Sie, dass für drei Vektoren $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ das Spatprodukt $\langle u, v \times w \rangle$ der drei Vektoren mit der Determinante der Matrix, deren Spalten die Vektoren u, v, w sind, übereinstimmt.

(c) Wie würden Sie das Volumen im Raum $\mathbb{R}^n$ definieren, welches das Parallelepiped besitzt, das von n gegebenen Vektoren aufgespannt wird?

(d) Formulieren Sie ein Kriterium um mit der Determinante n Vektoren im $\mathbb{R}^n$ auf lineare Unabhängigkeit zu testen und begründen Sie es anschaulich. Begründen Sie, dass Sie mit dem gleichen Kriterium auch die Invertierbarkeit einer $n \times n$ Matrix testen können.

(e) Verwenden Sie Ihr Kriterium, um die folgenden Vektoren auf lineare Abhängigkeit zu testen.

$$\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\0\\-1\end{pmatrix}$$

Verwenden Sie außerdem Ihr Kriterium, um die folgende Matrix auf Invertierbarkeit zu testen.

$$A = \begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\-5 & 3 & -7\\2 & -1 & 9\end{pmatrix}$$

Hausübung

Aufgabe H1 (6 Punkte)
Seien $a, b, c \in \mathbb{R}^3$.

(a) Beweisen Sie die *Jakobi-Identität*:

$$a \times (b \times c) + c \times (a \times b) + b \times (c \times a) = 0.$$

(b) Folgern Sie daraus

$$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c \iff b \times (c \times a) = 0.$$

Aufgabe H2 (6 Punkte)
Betrachten Sie die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}x + 2y + 3z\\3x + 2y + z\end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie durch konkretes Nachrechnen der definierenden Bedingung, dass f eine lineare Abbildung ist.

(b) Bestimmen Sie eine Matrix A, so dass $f(v) = Av$ für alle $v \in \mathbb{R}^3$ gilt.

(c) Bestimmen Sie den Kern von f. Dieser ist definiert durch

$$\ker(f) = f^{-1}(\{0\}) = f^{-1}(0) = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid f(v) = 0\}.$$

Aufgabe H3 (6 Punkte)
Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung mit

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \text{ und } f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie eine Formel für $f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)$ für beliebige Elemente $x, y \in \mathbb{R}$.

(b) Bestimmen Sie $\ker f$.