Lineare Algebra für Physiker
6. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Matthias Schneider
Dr. Silke Horn
Dipl. Math. Dominik Kremer

SS 2013
28./31. Mai 2013

Beachten Sie, dass Übung 6 (Michael Beckstein, Freitag, 8:00 in S1|03 126) am 31. Mai ausfällt. Bitte verteilen Sie sich auf die drei parallel stattfindenden Übungen:

Übung 3	S1|02 244
Übung 4	S1|03 175
Übung 5	S1|03 9

Gruppenübung

Aufgabe G1

Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Auf $\mathbb{R}^2$ ist durch
$$\big\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \big\rangle = x_1 y_1 - x_2 y_2$$
ein Skalarprodukt definiert.

(b) Auf $\mathbb{R}$ ist durch
$$\big\langle x, y \big\rangle = |x|$$
ein Skalarprodukt definiert.

(c) Auf $\mathbb{R}^2$ ist durch
$$\big\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \big\rangle = x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2$$
ein Skalarprodukt definiert.

(d) Auf $M_n(\mathbb{K})$ wird durch
$$\langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}(B^* A)$$
ein Skalarprodukt definiert.

Aufgabe G2

Für einen Körper $\mathbb{K}$ betrachten wir den Raum
$$\ell^2(\mathbb{K}) = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty \right\}.$$

Zeigen Sie, dass durch
$$\langle (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{x_i} y_i$$
ein Skalarprodukt auf $\ell^2(\mathbb{K})$ definiert ist.

Hinweis: Zeigen Sie die Konvergenz, indem Partialsummen abschätzen.

Aufgabe G3
Sei $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt versehen und sei $U \subset \mathbb{R}^4$ der von den Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

aufgespannte Untervektorraum. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U.

Aufgabe G4
Sei $w \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, mit $w_k > 0$, $k = 1, \dots, n$. Zeigen Sie, dass

$$\langle u, v \rangle_w := \sum_{k=1}^{n} w_k \overline{u_k} v_k, \qquad \text{für } u, v \in \mathbb{C}^n,$$

ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{C}^n$ definiert.

Aufgabe G5
Man zeige, dass w und $\overline{w}$ eine Basis von $\mathbb{C}$ über $\mathbb{R}$ bilden, wenn $w = a + bi$ und $a = \Re w \neq 0, b = \Im w \neq 0$ ist. Man berechne die Koordinaten der komplexen Zahl $z = x + iy$ relativ zu dieser Basis.

Hausübung

Aufgabe H1 (6 Punkte)
Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\mathsf{Span}\{b_1, b_2, b_3\}$ mit

$$b_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad b_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H2 (6 Punkte)
Sei $H_n = \{A \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid A^* = A\}$. Zeigen Sie, dass die Matrizen

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad b_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

bezüglich des Skalarprodukts

$$\langle A, B \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(A^* B)$$

eine Orthonormalbasis von H_2 bilden.

Aufgabe H3 (6 Punkte)
Man beweise mittels linearer Algebra die folgenden, aus der elementaren Geometrie bekannten Sätze:

(a) Satz des Thales: Es seien a, b, c drei verschiedene Punkte in der Ebene. Wenn c auf dem Kreis liegt, der die Verbindungsstrecke von a nach b als einen Durchmesser hat, so hat das aus a, b und c gebildete Dreieck bei c einen rechten Winkel. (Hinweis: Man lege den Ursprung des Koordinatensystems in den Mittelpunkt des Kreises.)

(b) Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt und dieser teilt jede Seitenhalbierende im Verhältnis 2 : 1. (Eine Seitenhalbierende in einem Dreieck ist die Strecke, die den Mittelpunkt einer Seite mit der gegenüberliegenden Ecke verbindet. Der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden ist der Schwerpunkt des Dreiecks.)