Lineare Algebra für Physiker
5. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Matthias Schneider
Dr. Silke Horn
Dipl. Math. Dominik Kremer

SS 2013
21./24. Mai 2013

Gruppenübung

Aufgabe G1
Es seien A und B jeweils $n \times n$ Matrizen. Außerdem soll $A \cdot B = E_n$ gelten.

(a) Zeigen Sie, dass dann auch $B \cdot A = E_n$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass $A^{-1} = B$ und $B^{-1} = A$ ist.

Aufgabe G2
Sei $B = (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis des $\mathbb{K}$-Vektorraums V. Zeigen Sie: Die Vektoren $a_1, \dots, a_m \in V$ sind genau dann linear unabhängig, wenn ihre B-Koordinatenvektoren $A_1, \dots, A_m$ linear unabhängig sind.

Aufgabe G3
Berechnen Sie (mit Hilfe einer Induktion nach $n \in \mathbb{N}$) die Determinante

$$V_n(x_1, \dots, x_n) := \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Dabei seien $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ beliebig und $n > 1$.

Aufgabe G4
Betrachten Sie den Vektorraum $V = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

(a) Sind die folgenden Funktionen f_1, f_2 in V linear unabhängig?

$$f_1(x) := e^x, \quad f_2(x) := x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(b) Sind die folgenden Funktionen f_1, f_2, f_3 in V linear unabhängig?

$$f_1(x) := \sin^2 x, \quad f_2(x) := \cos^2 x, \quad f_3(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(c) Sind die folgenden Funktionen f_1, f_2, f_3 in V linear unabhängig?

$$f_1(x) := 1, \quad f_2(x) := x, \quad f_3(x) = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Zeigen Sie jeweils ihre Behauptungen.

Aufgabe H1 (6 Punkte)
Es sei K ein Körper und V ein endlich erzeugter K-Vektorraum. Weiter seien U und W Unterräume von V. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $U \cap W = \{0\}$ und $U + W = V$ genau dann, wenn für jede geordnete Basis $(u_1, \ldots, u_k)$ von U und jede geordnete Basis $(w_1, \ldots, w_m)$ von W das Tupel $(u_1, \ldots, u_k, w_1, \ldots, w_m)$ eine geordnete Basis von V ist.

(b) Es gilt:

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

Zählen Sie dazu Vektoren in geeigneten Basen.

Aufgabe H2 (6 Punkte)
Man betrachte $V := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \mid a_{n+2} = a_{n+1} + a_n\}$

(a) Zeigen Sie, dass V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist und bestimmen Sie $\dim V$.

(b) Man bestimme $q_1 \neq q_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ derart, dass $(q_1^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(q_2^n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in V$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass $B = \{(q_1^n),\ (q_2^n)\}$ eine Basis von V ist.

(d) Man bestimme die Koordinaten der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in V$ mit $b_0 = 0, b_1 = 1$ bzgl. B und insbesondere eine Formel für b_n.

Aufgabe H3 (6 Punkte)

(a) Sei $V = \mathbb{K}^{n\times n}$ der $\mathbb{K}$-Vektorraum der $n \times n$-Matrizen über dem Körper $\mathbb{K}$. Bestimmen Sie die Dimension von V und geben Sie eine Basis von V an.

(b) Sei $H_n = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} \mid A^* = A\}$. Zeigen Sie, dass H_n ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, aber kein $\mathbb{C}$-Vektorraum ist. (Um zu zeigen, dass H_n ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist, genügt es zu zeigen, dass H_n ein Unterraum des $\mathbb{R}$-Vektorraums $C^{n\times n}$ ist.)

(c) Bestimmen Sie die Dimension von H_2 und geben Sie eine Basis von H_2 an.