Lineare Algebra für Physiker
4. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Matthias Schneider
Dr. Silke Horn
Dipl. Math. Dominik Kremer

SS 2013
14./17. Mai 2013

Gruppenübung

Aufgabe G1

Es sei A eine invertierbare $n \times n$-Matrix mit der inversen Matrix A^{-1}. Zeigen Sie, dass dann auch die Matrix A^T invertierbar ist und geben Sie die zugehörige inverse Matrix an.

Aufgabe G2

Es sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

und entscheiden Sie, für welche $\lambda \in \mathbb{C}$ sie invertierbar ist.

Aufgabe G3

Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$ und die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Ist $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ linear unabhängig?

(b) Ist $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ linear unabhängig?

(c) Ist $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$?

(d) Welche Teilmengen von $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ bilden eine Basis von $\mathbb{R}^3$?

Begründen Sie jeweils ihre Aussagen.

Aufgabe G4

In $\mathbb{R}^4$ betrachten wir die linearen Teilräume

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \, x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \right\} \quad \text{und} \quad V := \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Bestimmen Sie je eine Basis von U, V, $U \cap V$ und $U + V$.

Hausübung

Aufgabe H1 (6 Punkte)
Wir betrachten den $\mathbb{R}^n$ und einen linearen Unterraum $V = \mathsf{Span}(B)$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) B ist linear unabhängig und für jedes B' mit $B \subsetneq B'$ gilt, dass B' linear abhängig ist.

(b) B ist eine Basis des $\mathbb{R}^n$.

(c) $\mathsf{Span}(B) = \mathbb{R}^n$ und für jedes $b \in B$ ist $\mathsf{Span}(B \setminus \{b\}) \subsetneq \mathbb{R}^n$.

Aufgabe H2 (6 Punkte)
Bestimmen Sie für den von den Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^4$ aufgespannten linearen Teilraum eine Basis.

Aufgabe H3 (6 Punkte)
Wir betrachten den reellen Vektorraum $V = \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ der Polynomfunktionen vom Grad kleiner oder gleich drei. Man sieht leicht, dass die Menge $B = (1, x, x^2, x^3)$ eine Basis von V bildet. Zusätzlich betrachten wir noch die Menge $B' = (1, x+1, (x+1)^2, (x+1)^3)$.

(a) Zeigen Sie, dass B' eine Basis von $V = \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ ist.

(b) Bestimmen Sie die Koordinaten der Basisvektoren aus B' bezüglich der Basis B, d. h. stellen Sie alle Basisvektoren aus B' als Linearkombination der Vektoren aus B dar.

(c) Gegeben sei die Polynomfunktion $p(x) = x^3 + 3x^2 - 2$. Was sind die Koordinaten von p bezüglich der Basis B und bezüglich der Basis B'?

(d) Was sind die Koordinaten der Basisvektoren aus B bezüglich der Basis B'?