Lineare Algebra für Physiker
3. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Matthias Schneider
Dr. Silke Horn
Dipl. Math. Dominik Kremer

SS 2013
7./10. Mai 2013

Gruppenübung

Aufgabe G1
Berechnen Sie die Determinate der folgenden Matrizen:

(a)
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$
(b)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$
(c)
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe G2
Entscheiden Sie, ob die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist und bestimmen Sie gegebenenfalls die Inverse.

Aufgabe G3
Wir haben auf dem letzten Übungsblatt gesehen, dass $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$. Kann man auch bei Produkten von mehr als zwei Matrizen die Reihenfolge beliebig permutieren?

Aufgabe G4
(a) Zeigen Sie, dass man jede Permutation $\pi \in S_n, n \in \mathbb{N}$ als Produkt von Transpositionen schreiben kann.

(b) Schreiben Sie die Permutation

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \in S_5$$

als Produkt von Transpositionen und bestimmen Sie $\operatorname{sgn} \pi$. (Die Notation ist dabei so zu verstehen, dass $\pi(1) = 3, \pi(2) = 1, \ldots,$ ist.)

(c) Bestimmen Sie alle Elemente von S_4.

Aufgabe G5
Berechnen Sie die Determinante der $(n \times n)$-Matrix

$$A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

bei der $a_{i,j} = 1$ für $i = j + 1$ oder $j = i + 1$ gilt, während alle anderen Einträge $a_{i,j}$ Null sind.

Hausübung

Aufgabe H1 (6 Punkte)

(a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le 4} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe der Definition der Determinante.

(b) Berechnen Sie die Determinante der Matrix A mit Hilfe des Gauß-Algorithmus.

(Bringen Sie dazu die Matrix in obere Dreiecksgestalt, beachten Sie wie sich die Determinante dabei verändert und berechnen Sie im letzten Schritt die Determinante der Matrix in oberer Dreiecksgestalt wie in der Vorlesung behandelt.)

(c) Betrachten Sie nun die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a & b \\ 0 & a & 1 & 3 \\ 0 & b & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$ beliebig. Bestimmen Sie die Determinante von B.

Aufgabe H2 (6 Punkte)

Es seien beliebige quadratische Matrizen A und B mit Einträgen aus $\mathbb{C}$ gegeben. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $A \cdot A = E \Longrightarrow \det(A) = \pm 1$.

(b) A ist nicht invertierbar $\Longrightarrow AB$ ist nicht invertierbar.

(c) $\det(A) + \det(B) = \det(A + B)$.

(d) $A^3 = 0 \Longrightarrow A = 0$.

(e) $A^3 = 0 \Longrightarrow (E - A)^{-1} = E + A + A^2$.

(f) $\det(A) \in \mathbb{R} \Longrightarrow$ alle Einträge in A sind reell.

Aufgabe H3 (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass $n + 1$ Vektoren in $\mathbb{K}^n$ immer linear abhängig sind.