Lineare Algebra für Physiker
2. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Matthias Schneider
Dr. Silke Horn
Dipl. Math. Dominik Kremer

SS 2013
30. April/3. Mai 2013

Gruppenübung

Aufgabe G1

(a) Folgt aus „Wenn es regnet, gibt es Wolken.“, dass es keine Wolken gibt, wenn es nicht regnet?

(b) Stellen Sie den obigen Schluss mithilfe der Aussagenlogik dar und begründen Sie, warum er falsch ist.

Aufgabe G2

Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden linearen Gleichungssysteme.

(a)

$$\begin{array}{rrrrcr} 2x & +y & -z & +t & = & 0 \\ x & +3y & & -t & = & 1 \\ & y & & +t & = & -2 \\ & -2y & & -2t & = & 1 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rrrcr} x & +y & +z & = & 0 \\ x & -y & +z & = & 0 \\ -x & -y & -z & = & 0 \end{array}$$

Aufgabe G3

Bestimmen Sie alle Untervektorräume des $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe G4 (Vektorräume)

Zeigen Sie, dass $V = \mathbb{R}$ mit den folgenden Operationen einen $\mathbb{R}$-Vektorraum bildet.

$$\begin{aligned} +_V &: V \times V \to V, \qquad (x, y) \mapsto x + y - 1 \\ \cdot_V &: \mathbb{R} \times V \to V, \qquad (\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x - \lambda + 1 = \lambda x - \lambda + 1 \end{aligned}$$

Dabei bezeichnen $+$ und $\cdot$ die gewöhnliche Addition bzw. Multiplikation der komplexen Zahlen.

Hausübung

Aufgabe H1 (6 Punkte)
Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme:

(a)

$$\begin{array}{rrrl} x & +y & +z & = 1 \\ x & +2y & +4z & = 2 \\ x & +3y & +9z & = 3 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rrrrcr} 2x & & & +4t & = & 1 \\ x & +3y & -2z & -t & = & 3 \\ & & & t & = & -2 \\ x & -2y & & -2t & = & 3 \end{array}$$

Aufgabe H2 (6 Punkte)
Seien $A \in \mathbb{K}^{m \times n}, B \in \mathbb{K}^{n \times p}$.

(a) Zeigen Sie: $(AB)^T = B^T A^T$.

(b) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Zeigen Sie: $(AB)^* = B^* A^*$.

(c) Sei nun $m = p$. (Dann sind $AB \in \mathbb{K}^{m \times m}$ und $BA \in \mathbb{K}^{n \times n}$ quadratisch.) Zeigen Sie $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

Aufgabe H3 (6 Punkte)
Seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $v_1, \dots, v_n \in V, v_i \neq 0$ für $i = 1, \dots, n$.

(a) Beweisen Sie: Wenn es $i, 1 \leq i \leq n$ gibt mit $\mathrm{Span}\{v_1, \dots, v_n\} = \mathrm{Span}\{v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n\}$, dann sind $v_1, \dots, v_n$ linear abhängig.

(b) Gilt die Umkehrung auch? Beweisen Sie Ihre Aussage.