Lineare Algebra für Physiker
12. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Matthias Schneider
Dr. Silke Horn
Dipl.-Math. Dominik Kremer

SS 2013
9./12. Juli 2013

Hinweis: Zur Klausurvorbereitung hat Prof. Schneider eine *Probeklausur* erstellt, die Sie separat herunterladen können. Die Bearbeitung dieser Probeklausur zählt in dieser Woche als *Hausübung* und hat somit Einfluss auf Ihren *Klausurbonus*. Bitte geben Sie sie wie gewohnt in der nächsten Woche bei Ihrem Übungsleiter ab.

Wir weisen außerdem darauf hin, dass wir nach Abschluss der Korrekturen die Ergebnisse der Hausübungen in der üblichen Zuordnung „*Matrikel-Nummer — Punktzahl — Bonus Ja/Nein*" veröffentlichen wollen. Sollten Sie damit nicht einverstanden sein, wenden Sie sich bitte an Dominik Kremer (kremer@mathematik.tu-darmstadt.de).

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Hauptachsentransformation)
Gegeben sei die Menge

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : 7x_1^2 + 24x_1x_2 = 1 \right\}.$$

(a) Finden Sie eine symmetrische Matrix A, so dass $Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : x^T A x = 1 \right\}$.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und eine Hauptachsentransformation von A.

(c) Skizzieren Sie Q.
Hinweis: Betrachten Sie $\mathbb{R}^2$ bezüglich einer Basis aus Hauptachsen von A.

Aufgabe G2 (Definite Matrizen)

(a) Betrachten Sie die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -10 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 14 \end{pmatrix}.$$

Welche davon sind positiv definit? Welche sind negativ definit? Zeigen Sie jeweils ihre Aussagen.

(b) Gibt es nicht invertierbare positiv definite Matrizen? Zeigen Sie Ihre Aussage.

Aufgabe G3 (Skalarprodukte in $\mathbb{R}^n$)
Wir wollen in dieser Aufgabe alle Skalarprodukte des Euklidischen Vektorraums $\mathbb{R}^n$ charakterisieren. Zeigen Sie hierzu Folgendes:

(a) Ist $A \in M_n(\mathbb{R})$ eine symmetrische, positiv definite Matrix, so definiert $\langle x, y \rangle = x^T A y$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$.

(b) Ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$, so gibt es eine symmetrische, positiv definite Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ mit $\langle x, y \rangle = x^T A y$.

Aufgabe G4 (Hauptachsentransformation II)
Bestimmen Sie eine Hauptachsentransformation der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$