Lineare Algebra für Physiker
11. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Matthias Schneider
Dr. Silke Horn
Dipl.-Math. Dominik Kremer

SS 2013
2./5. Juli 2013

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Minitest)

(a) Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

- ☐ Symmetrische Matrizen sind diagonalisierbar.
- ☐ Symmetrische Matrizen sind normal.
- ☐ Reelle symmetrische Matrizen sind normal.
- ☐ Selbstadjungierte Matrizen sind diagonalisierbar.
- ☐ Orthogonale Matrizen sind unitär.
- ☐ Unitäre Matrizen sind orthogonal.
- ☐ Das Produkt symmetrischer Matrizen ist symmetrisch.
- ☐ Hermitesche Matrizen sind selbstadjungiert.
- ☐ Selbstadjungierte Matrizen sind hermitesch.
- ☐ Es gibt normale Matrizen, die nicht diagonalisierbar sind.

(b) Entscheiden Sie bei den folgenden Matrizen, ob sie symmetrisch, unitär, orthogonal, hermitesch, selbstadjungiert, normal oder diagonalisierbar sind!

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_4 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$M_5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_6 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \qquad M_7 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \qquad M_8 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe G2 (Adjungierter Operator)

Es sei $A\colon V \to V$ ein Endomorphismus des unitären Vektorraums V. Zeigen Sie, dass $\operatorname{Kern}(A^*) = \operatorname{Bild}(A)^\perp$.

Aufgabe G3 (Dualraum)

Für einen $\mathbb{K}$-Vektorraum V bezeichnet $V^* = \operatorname{Hom}(V, \mathbb{K})$ die Menge der linearen Abbildungen $V \to \mathbb{K}$. Bezüglich der folgenden Addition und skalaren Multiplikation hat V^* selbst die Struktur eines $\mathbb{K}$-Vektorraums:

$$\begin{aligned} +\colon V^* \times V^* \to V^*, &\quad (\varphi, \psi) \mapsto \varphi + \psi \qquad \text{mit} \qquad (\varphi + \psi)(w) = \varphi(w) + \psi(w), \\ \cdot\colon \mathbb{K} \times V^* \to V^*, &\quad (\lambda, \varphi) \mapsto \lambda\varphi \qquad \text{mit} \qquad (\lambda\varphi)(w) = \lambda\varphi(w). \end{aligned}$$

Der so konstruierte Vektorraum V^* heißt *Dualraum* von V. Wir nehmen im Folgenden an, dass V endlichdimensional und mit einem Skalarprodukt ausgestattet ist, und definieren die Abbildung

$$\varphi\colon V \to V^*, \quad v \mapsto \varphi_v \qquad \text{mit} \qquad \varphi_v(w) = \langle v, w \rangle.$$

Beweisen oder widerlegen Sie,

(a) dass φ eine lineare Abbildung ist,

(b) dass φ injektiv ist und

(c) dass φ surjektiv ist.

Was sagen Ihre Resultate über das Verhältnis von V und V^* aus?

Aufgabe G4 (Verallgemeinerungen selbstadjungierter Matrizen)
Für $\lambda \in \mathbb{C}$ sei

$$V(\lambda,*) = \left\{A \in M_n(\mathbb{C}) : A^* = \lambda A\right\}.$$

(a) Bestimmen Sie alle $A \in V(\lambda,*)$ für $|\lambda| \neq 1$.

(b) Zeigen Sie: Für $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| = 1$ gibt es ein $z = z(\lambda) \in \mathbb{C}$ mit $V(\lambda,*) = z \cdot V(1,*) = \{z \cdot A : A^* = A\}$.

(c) Bestimmen Sie ein mögliches $z = z(-1)$.

Hausübung

Aufgabe H1 (Hauptsatz über reelle symmetrische Matrizen) (6 Punkte)

(a) Zeigen Sie den Hauptsatz über reelle symmetrische Matrizen direkt. Gehen Sie dabei wie folgt vor:
   i. Zeigen Sie, dass jede reelle symmetrische Matrix A einen reellen Eigenwert besitzt.
   ii. Zeigen Sie: Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein unter A invarianter Unterraum, dann ist auch $U^\perp$ ein A-invarianter Unterraum.
   iii. Zeigen Sie induktiv, dass es eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A in $\mathbb{R}^n$ gibt und folgern Sie den Hauptsatz.

(b) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie eine Diagonalmatrix D und eine orthogonale Matrix S, sodass $S^T A S = D$ gilt. Geben Sie beide Matrizen konkret an.

Aufgabe H2 (Adjungierte der Ableitung) (6 Punkte)
Sei $\mathscr{P}_2 = \left\{a_2x^2 + a_1x + a_0 : a_i \in \mathbb{R}\right\}$ der Vektorraum der rellen Polynome von Grad ≤ 2 mit dem Skalarprodukt

$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,\mathrm{d}x.$$

Berechnen Sie die Adjungierte φ^* des Ableitungsoperators $\varphi(p) = p'$.

Aufgabe H3 (Simultane Diagonalisierung) (6 Punkte)
Wir betrachten einen endlichdimensionalen unitären Vektorraum V mit normalen Endomorphismen $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$.

- Die φ_i *kommutieren paarweise*, wenn $\varphi_i \circ \varphi_j = \varphi_j \circ \varphi_i$ für alle i, j gilt.
- Die φ_i sind *simultan diagonalisierbar*, falls eine Basis $\mathscr{B}$ aus *simultanen Eigenvektoren* existiert. Das bedeutet, dass alle φ_i bezüglich $\mathscr{B}$ Diagonalgestalt haben, bzw. dass jedes Element von $\mathscr{B}$ Eigenvektor von jedem φ_i ist.

Zeigen Sie, dass die φ_i genau dann paarweise kommutieren, wenn sie simultan diagonalisierbar sind.

Tipp: Gehen Sie bei der Hinrichtung induktiv vor. Die folgende Aussage (Übung 10, Aufgabe G1b) ist dabei wichtig: *„Kommutieren φ_i und φ_j, so ist jeder Eigenraum V' von φ_i invariant unter φ_j, d. h. $\varphi_j(V') \subseteq V'$.“*