Lineare Algebra für Physiker
10. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Matthias Schneider
Dr. Silke Horn
Dipl.-Math. Dominik Kremer

SS 2013
25./28. Juni 2013

Achtung: Bitte beachten Sie, dass die beiden Übungen *Dienstags um 15:20* ab sofort zusammen gelegt werden. Fortan wird zu dieser Zeit nur noch eine Übung in *S1|03 11* stattfinden.

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Invariante Eigenräume)
Es seien $f, g : V \to V$ lineare Abbildungen.

(a) Zeigen Sie: Die Eigenräume von f^n sind f-invariant.

(b) Es gelte

$$f \circ g = g \circ f.$$

Zeigen Sie: Die Eigenräume von g sind f-invariant.

Hinweis: Ein Untervektorraum U von V heißt f-invariant, wenn $f(U) \subseteq U$ gilt.

Aufgabe G2 (Eigenwerte)
Bestimmen Sie die Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren der $n \times n$-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

deren Einträge alle Eins sind.

Aufgabe G3 (Polynomdivision)

(a) Bestimmen Sie die Vielfachheiten der Nullstellen des Polynoms

$$p(x) = x^5 - 8x^4 + 24x^3 - 34x^2 + 23x - 6,$$

indem Sie es durch $q(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ teilen.

(b) Bestimmen Sie die Vielfachheit der Nullstelle $x_0 = 1$ des Polynoms $p_9(x) = x^9 - 1$. Können Sie die Vielfachheit dieser Nullstelle auch für das allgemeinere Polynom $p_n(x) = x^n - 1$ mit $n \in \mathbb{N}$ angeben?

Aufgabe G4 (Eigenvektoren anschaulich)
Wir betrachten eine Gerade g und eine Ebene E in $\mathbb{R}^3$, die $g \cap E = \{0\}$ erfüllen. Bestimmen Sie die reellen Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren der folgenden Abbildungen und entscheiden Sie jeweils, ob eine Basis aus Eigenvektoren existiert:

(a) Punktspiegelung am Ursprung

(b) 180° Drehung um g

(c) 90° Drehung um g

(d) Parallelprojektion längs g auf E

(e) Parallelprojektion längs E auf g

Hinweis: Zerfällt ein Vektorraum V in die direkte Summe zweier Untervektorräume V_1 und V_2, so bezeichnet man die Abbildung

$$V = V_1 \oplus V_2 \to V_1, \quad v_1 + v_2 \mapsto v_1$$

als *Parallelprojektion längs V_2 auf V_1*.

Hausübung

Aufgabe H1 (Nilpotente Matrizen) (6 Punkte)

Wir betrachten eine komplexe $n \times n$-Matrix A mit charakteristischem Polynom p_A. Zeigen Sie:

(a) Ist A nilpotent (gilt also $A^d = 0$ für ein $d \in \mathbb{N}$), so ist

$$p_A(t) = (-1)^n t^n.$$

(b) Aus $(A - \lambda E_n)^d = 0$ für einen Wert $\lambda \in \mathbb{C}$ folgt

$$p_A(t) = (\lambda - t)^n.$$

Aufgabe H2 (Regeln für Eigenwerte) (6 Punkte)

Es sei V ein Vektorraum und $\varphi : V \to V$ ein Endomorphismus.

(a) Wir nehmen an, dass $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$ den Eigenwert 1 hat und dass $v \in V$ ein zugehöriger Eigenvektor von φ^2, aber kein Eigenvektor von φ ist. Zeigen Sie, dass φ dann die Eigenwerte 1 und -1 hat.

(b) Wir nehmen an, dass -1 ein Eigenwert von $\varphi^2 + \varphi$ ist. Zeigen Sie, dass φ^3 dann den Eigenwert 1 hat.

Aufgabe H3 (Geometrische und algebraische Vielfachheit) (6 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

und jeweils die zugehörige geometrische und algebraische Vielfachheit.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

und jeweils die zugehörige geometrische und algebraische Vielfachheit.