# Lineare Algebra für Physiker
# 1. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Matthias Schneider
Dr. Silke Horn
Dipl. Math. Dominik Kremer

WS 2012/13
22./26. April 2013

## Gruppenübung

**Aufgabe G1**
Entscheiden Sie, welche Aussagen über die natürlichen Zahlen wahr sind.

(a) $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq n$

(b) $\exists n \in \mathbb{N} : 3 \leq n$

(c) $\forall n \in \mathbb{N} : 3 \leq n$

(d) $\forall n \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N} : k = 2n$

(e) $\exists n \in \mathbb{N} : \forall k \in \mathbb{N} : k = 2n$

(f) $\forall k \in \mathbb{N} : \exists n \in \mathbb{N} : k = 2n$

Begründen Sie Ihre Antworten.

**Aufgabe G2**
Zeigen Sie:

$$\operatorname{Span}_{\mathbb{C}}\left(\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}i\\ 1\end{pmatrix}\right) = \mathbb{C}^2.$$

*Hinweis:* Lösen Sie ein geeignetes Gleichungssystem.

**Aufgabe G3**

(a) Zeigen Sie, dass die Inversionsformel

$$(a+bi)^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}i$$

für komplexe Zahlen korrekt ist.

(b) Berechnen Sie $\frac{5-3i}{3+2i}$.

(c) Bestimmen Sie $(2-i)\cdot(2-2i)$ geometrisch.

(d) Sei $c = a + bi$ eine komplexe Zahl. Berechnen Sie $(x-c)(x-\bar{c})$. Können Sie eine Lösung von $x^2 - 2x + 2 = 0$ raten?

**Aufgabe G4**
Betrachten Sie folgende Rechnung:

$$-1 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1\ .$$

Was ist hier passiert?

**Aufgabe G5**
Es sei $V = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$ die Menge der reellen Zahlenfolgen.

(a) Zeigen Sie: $V$ bildet mit den Operationen

$$\begin{aligned} + : V \times V \to V, &\qquad \big((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) \mapsto (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ und} \\ \cdot : \mathbb{R} \times V \to V, &\qquad \big(\lambda, (a_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) \mapsto (\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

einen $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(b) Ist die Teilmenge $U_1 := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \,|\, (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V,$ endlich viele der $a_n$ sind ungleich Null $\}$ ein Untervektorraum von $V$? Zeigen Sie ihre Aussage.

(c) Ist die Teilmenge $U_2 := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \,|\, (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V,$ endlich viele der $a_n$ sind gleich Null $\}$ ein Untervektorraum von $V$? Zeigen Sie ihre Aussage.

## Hausübung

**Aufgabe H1** (6 Punkte)
Zeigen Sie: Der Schnitt zweier Unterräume ist wieder ein Unterraum.

**Aufgabe H2** (6 Punkte)

(a) Betrachten Sie folgende komplexe Zahlen:

$$z_1 = 3 + 4i, \qquad z_2 = -2 + i, \qquad z_3 = 7 - i.$$

Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil von $z_1 + z_3$, $z_1 z_2$ und $\frac{z_1}{z_2}$.

(b) Sei $z \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$. Eine Zahl $r \in \mathbb{C}$ heißt *Quadratwurzel* von $z$, falls $r^2 = z$ gilt. Bestimmen Sie alle Quadratwurzeln von $-1$, von $i$ und von $3 + 4i$.

(c) Schreiben Sie folgende komplexe Zahlen in der Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

$$i^{123456789}, \qquad \sum_{k=1}^{13823807582365} i^k$$

**Aufgabe H3** (6 Punkte)
Entscheiden Sie, in Abhängigkeit von $z \in \mathbb{C}$, ob die folgenden Vektoren linear unabhängig sind:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} z \\ 2i \\ 1+i \end{pmatrix}$$