Lineare Algebra für Physiker
— Probeklausur —

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Matthias Schneider
Dr. Silke Horn
Dipl.-Math. Dominik Kremer

SS 2013
9./12. Juli 2013

Hinweise

(a) Die Bearbeitungsdauer der Klausur beträgt 90 Minuten.

(b) Als Hilfsmittel zur Klausur sind zugelassen: keine.

(c) Mobiltelefone sind auszuschalten und in der Tasche zu verstauen.

(d) Bitte legen Sie Ihren Studierendenausweis zusammen mir einem Lichtbildausweis zur Kontrolle bereit.

(e) **Viel Erfolg!**

Aufgaben

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Es seien X und Y Vektorräume über $\mathbb{C}$.

(a) Geben Sie eine mathematische Definition der linearen Unabhängigkeit von Vektoren $\{x_1, \ldots, x_n\}$ aus X.

(b) Wie lautet die Dimensionsformel für einen Vektorraumhomomorphismus $\varphi \in \mathrm{Hom}(X, Y)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a) Entscheiden Sie mit Begründung, ob die folgende komplexe Matrix diagonalisierbar ist:

$$\begin{pmatrix} i & i \\ i & i \end{pmatrix}.$$

(b) Entscheiden Sie mit Begründung, ob es eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren folgender komplexer Matrix gibt:

$$\begin{pmatrix} 0 & i & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Betrachten Sie $\varphi \in L(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$ definiert durch

$$\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 \\ 2x_3 - x_1 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 \\ \frac{1}{2}x_1 - x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie die Spur von φ. (1 Punkt)

(b) Bestimmen Sie eine Basis von Kern φ. (1 Punkt)

(c) Bestimmen Sie eine Basis von Bild φ. (1 Punkt)

Alle Antworten sind zu begründen, etwa durch eine Rechnung.

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Betrachten Sie in $\mathbb{C}^3$

$$B := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ und } C := \left(\begin{pmatrix} i \\ i \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

(a) Zeigen Sie, dass C eine Basis von $\mathbb{C}^3$ ist. (1 Punkt)

(b) Bestimmen Sie durch eine Rechnung die Übergangsmatrizen ${}_C(\mathrm{id})_B$ und ${}_B(\mathrm{id})_C$. (2 Punkte)

Aufgabe 5 (3 Punkte)

Betrachten Sie folgende komplexe Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1+i & 0 & -1-i \\ -i & 2i & 1 \\ 1+i & 0 & 1+i \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A. (1 Punkt)

(b) Bestimmen Sie für jeden Eigenwert von A eine Basis des entsprechended Eigenraums. (2 Punkte)

Alle Antworten sind zu begründen, etwa durch eine Rechnung.

Aufgabe 6 (3 Punkte)

Betrachten Sie $\mathbb{C}^3$ versehen mit dem Standard-Skalarprodukt und bestimme Sie durch eine Rechnung eine Orthonormalbasis des Orthogonalkomplements von

$$\operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Aufgabe 7 (2 Punkte)

Es sei H ein endlich dimensionaler Prähilbertraum und $\varphi \in L(H, H)$. Zeigen Sie:

φ ist genau dann normal, wenn für alle $x \in H$ gilt: $\|\varphi(x)\| = \|\varphi^*(x)\|$.