Lineare Algebra für Physiker
— Probeklausur —

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Matthias Schneider
Dr. Silke Horn
Dipl.-Math. Dominik Kremer

SS 2013
9./12. Juli 2013

Hinweise

(a) Die Bearbeitungsdauer der Klausur beträgt 90 Minuten.

(b) Als Hilfsmittel zur Klausur sind zugelassen: keine.

(c) Mobiltelefone sind auszuschalten und in der Tasche zu verstauen.

(d) Bitte legen Sie Ihren Studierendenausweis zusammen mir einem Lichtbildausweis zur Kontrolle bereit.

(e) **Viel Erfolg!**

Aufgaben

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Es seien X und Y Vektorräume über $\mathbb{C}$.

(a) Geben Sie eine mathematische Definition der linearen Unabhängigkeit von Vektoren $\{x_1, \dots, x_n\}$ aus X.

(b) Wie lautet die Dimensionsformel für einen Vektorraumhomomorphismus $\varphi \in \mathrm{Hom}(X, Y)$.

Lösung:

(a) Die Vektoren $\{x_1, \dots, x_n\}$ sind linear unabhängig, wenn aus $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = 0$ für Koeffizienten $\lambda_i \in \mathbb{C}$ bereits $\lambda_i = 0$ für $i = 1, \dots, n$ folgt.

(b) Die Dimensionsformel für einen Vektorraumhomomorphismus $\varphi \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ lautet

$$\dim \mathrm{Kern}(\varphi) + \dim \mathrm{Bild}(\varphi) = \dim(X).$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a) Entscheiden Sie mit Begründung, ob die folgende komplexe Matrix diagonalisierbar ist:

$$\begin{pmatrix} i & i \\ i & i \end{pmatrix}.$$

(b) Entscheiden Sie mit Begründung, ob es eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren folgender komplexer Matrix gibt:

$$\begin{pmatrix} 0 & i & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

(a) Die Matrix hat zwei verschiedene Eigenwerte 0 und $2i$ und ist daher diagonalisierbar.

(b) Die Eigenwerte sind 0 (mit algebraischer Vielfachheit 2) und 1 (mit Vielfachheit 1). Der Eigenraum zum Eigenwert 0 ist der Kern der Matrix, also $\operatorname{span}(1,0,0)^T$ und damit 1-dimensional. Es gibt also keine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren.

Alternativ kann man auch nachrechnen, dass die Matrix nicht normal ist. Es gilt nämlich

$$\begin{pmatrix} 0 & i & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & i & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^* \cdot \begin{pmatrix} 0 & i & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Betrachten Sie $\varphi \in L(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$ definiert durch

$$\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 \\ 2x_3 - x_1 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 \\ \frac{1}{2}x_1 - x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie die Spur von φ. (1 Punkt)

(b) Bestimmen Sie eine Basis von $\operatorname{Kern} \varphi$. (1 Punkt)

(c) Bestimmen Sie eine Basis von $\operatorname{Bild} \varphi$. (1 Punkt)

Alle Antworten sind zu begründen, etwa durch eine Rechnung.

Lösung:

(a) Offensichtlich gilt $\varphi(x) = Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Also ist $\operatorname{Spur}(\varphi) = \operatorname{Spur}(A) = 2$.

(b) Man rechnet leicht nach, dass die ersten drei Spalten von A linear unabhängig sind. Also bildet der Vektor $(0,0,0,1)^T$ bereits eine Basis von $\operatorname{Kern}(\varphi)$.

(c) Die ersten drei Spalten von A bilden aufgrund ihrer linearen Unabhängigkeit eine Basis von $\operatorname{Bild}(\varphi)$. Konkret besteht diese Basis aus den Vektoren $\left(1,-1,4,\frac{1}{2}\right)^T$, $\left(\frac{1}{2},0,3,-1\right)^T$, $(1,2,1,1)^T$.

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Betrachten Sie in $\mathbb{C}^3$

$$B := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ und } C := \left(\begin{pmatrix} i \\ i \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

(a) Zeigen Sie, dass C eine Basis von $\mathbb{C}^3$ ist. (1 Punkt)

(b) Bestimmen Sie durch eine Rechnung die Übergangsmatrizen ${}_C(\mathrm{id})_B$ und ${}_B(\mathrm{id})_C$. (2 Punkte)

Lösung:

(a) Es genügt zu zeigen, dass die drei Vektoren linear unabhängig sind. Dies trifft zu, da

$$\det \begin{pmatrix} i & 0 & 1 \\ i & 1 & 0 \\ i & -1 & 1 \end{pmatrix} = -i \neq 0.$$

(b) Die Übergangsmatrix ${}_B(\mathrm{id})_C$ erhalten wir direkt, indem wir die Basisvektoren von C als Spalten einer Matrix schreiben. Die Übergangsmatrix ${}_C(\mathrm{id})_B$ ergibt sich dann durch Matrixinversion:

$${}_B(\mathrm{id})_C = \begin{pmatrix} i & 0 & 1 \\ i & 1 & 0 \\ i & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad {}_C(\mathrm{id})_B = {}_B(\mathrm{id})_C^{-1} = \begin{pmatrix} i & -i & -i \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5 (3 Punkte)

Betrachten Sie folgende komplexe Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1+i & 0 & -1-i \\ -i & 2i & 1 \\ 1+i & 0 & 1+i \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A. (1 Punkt)

(b) Bestimmen Sie für jeden Eigenwert von A eine Basis des entsprechended Eigenraums. (2 Punkte)

Alle Antworten sind zu begründen, etwa durch eine Rechnung.

Lösung:

(a) Das charakteristische Polynom von A lautet

$$p_A(t) = \det(A - tE) = -t^3 + (2+4i)t^2 + (4-8i)t - 8 = (2-t)(2i-t)^2$$

und hat die Nullstellen $\lambda_1 = 2$ (einfach) und $\lambda_2 = 2i$ (doppelt).

(b) Der Eigenraum zum Eigenwert 2 wird vom Vektor $(-i, 0, 1)^T$ erzeugt, derjenige zum Eigenwert $2i$ vom Vektor $(0, 1, 0)^T$.

Aufgabe 6 (3 Punkte)

Betrachten Sie $\mathbb{C}^3$ versehen mit dem Standard-Skalarprodukt und bestimme Sie durch eine Rechnung eine Orthonormalbasis des Orthogonalkomplements von

$$\mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Lösung: Ein Vektor $v = (x, y, z)^T \in \mathbb{C}^3$ befindet sich genau dann im Orthogonalkomplement, wenn $x - iy + z = 0$. Also bilden die Vektoren $v_1 = (-1, 0, 1)^T$ und $v_2 = (0, -i, 1)^T$ eine Basis dieses Komplements. Um daraus eine Orthonormalbasis (w_1, w_2) zu erhalten, verwenden wir nun das Verfahren von Gram-Schmidt:

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{w}_2 = v_2 - \langle w_1, v_2 \rangle w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$w_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 7 (2 Punkte)

Es sei H ein endlich dimensionaler Prähilbertraum und $\varphi \in L(H,H)$. Zeigen Sie:

φ ist genau dann normal, wenn für alle $x \in H$ gilt: $\|\varphi(x)\| = \|\varphi^*(x)\|$.

Lösung: Ist φ normal, so folgt für alle $x \in H$ unmittelbar

$$\|\varphi(x)\|^2 = \langle \varphi(x), \varphi(x)\rangle = \langle x, (\varphi^* \circ \varphi)(x)\rangle = \langle x, (\varphi \circ \varphi^*)(x)\rangle = \langle \varphi^*(x), \varphi^*(x)\rangle = \|\varphi^*(x)\|^2.$$

Im Folgenden nehmen wir umgekehrt an, dass die Gleichheit $\|\varphi(x)\| = \|\varphi^*(x)\|$ für alle $x \in H$ gilt. Mit Hilfe der Polarisationsidentität folgt dann für alle $x, y \in H$

$$\left\langle (\varphi^* \circ \varphi)(x), y \right\rangle = \left\langle \varphi(x), \varphi(y) \right\rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^k \left\| i^k \varphi(x) + \varphi(y) \right\|^2 = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^k \left\| \varphi\left(i^k x + y \right) \right\|^2$$

und

$$\left\langle (\varphi \circ \varphi^*)(x), y \right\rangle = \left\langle \varphi^*(x), \varphi^*(y) \right\rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^k \left\| i^k \varphi^*(x) + \varphi^*(y) \right\|^2 = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^k \left\| \varphi^*\left(i^k x + y \right) \right\|^2.$$

Aufgrund unserer Annahme stimmen die rechten Seiten der beiden Gleichungen überein. Also ist

$$\left\langle (\varphi^* \circ \varphi - \varphi \circ \varphi^*)(x), y \right\rangle = \left\langle (\varphi^* \circ \varphi)(x), y \right\rangle - \left\langle (\varphi \circ \varphi^*)(x), y \right\rangle = 0.$$

Indem wir nun noch $y = (\varphi^* \circ \varphi - \varphi \circ \varphi^*)(x)$ wählen, erhalten wir wegen der positiven Definitheit des Skalarprodukts

$$\left(\varphi^* \circ \varphi - \varphi \circ \varphi^*\right)(x) = 0$$

für alle $x \in H$. Dies impliziert nun offensichtlich $\varphi^* \circ \varphi = \varphi \circ \varphi^*$, was zu zeigen war. □