Lineare Algebra für Physiker
9. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Matthias Schneider
Dr. Silke Horn
Dipl.-Math. Dominik Kremer

SS 2013
18./21. Juni 2013

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Eigenwerte und Eigenvektoren)
Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden reellwertigen Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Es ist

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda E_3) &= \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} 0 & \lambda - 2 & (\lambda-3)(3-\lambda)+1 \\ 0 & 2-\lambda & 2\lambda - 4 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (\lambda - 2) \det \begin{pmatrix} 1 & -\lambda^2 + 6\lambda - 8 \\ -1 & 2\lambda - 4 \end{pmatrix} \\
&= (\lambda-2)(2\lambda - 4 - \lambda^2 + 6\lambda - 8) \\
&= -(\lambda-2)^2(\lambda-6).
\end{aligned}$$

Eigenwerte von A sind daher $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 6$. Die Eigenvektoren von A zu $\lambda_1 = 2$ berechnen sich durch Lösen des homogenen Gleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$. Eigenvektoren von A zu $\lambda_2 = 6$ berechnen sich ebenso:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

für alle $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Aufgabe G2 (Eigenwerte beim Transponieren)

(a) Sei A eine quadratische Matrix über $\mathbb{R}$. Beweisen oder widerlegen Sie, dass A und A^T die gleichen Eigenwerte haben.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie, dass A und A^T die gleichen Eigenvektoren haben.

Lösung:

(a) Sei λ ein Eigenwert von A. Dann ist $\det(A-\lambda E)=0$. Da die Determinante invariant unter Transponieren ist, folgt damit

$$\det\left(A^T-\lambda E\right)=\det\left((A-\lambda E)^T\right)=\det(A-\lambda E)=0.$$

Also ist λ auch ein Eigenwert von A^T. Ebenso sieht man ein, dass umgekehrt jeder Eigenwert von A^T auch ein Eigenwert von $A=(A^T)^T$ ist. Folglich haben die Matrizen A und A^T die gleichen Eigenwerte.

(b) Die Aussage lässt sich durch folgendes einfache Gegenbeispiel wiederlegen: Sei

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}.$$

Dann ist $v=(1,0)^T$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert 0, denn $Av=0=0v$. Jedoch ist v kein Eigenvektor von A^T, denn

$$A^Tv=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\neq\lambda v\qquad\text{für alle }\lambda\in\mathbb{R}.$$

Aufgabe G3 (Eigenwerte des Shift-Operators)
Wir betrachten den Raum $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ aller reellen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und die Abbildung

$$S:\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\to\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}}\mapsto(a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}.$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume von S.

Lösung: Betrachten wir die Bedingung

$$S(a_1,a_2,a_3,\dots)=(a_2,a_3,\dots)\overset{!}{=}(\lambda a_1,\lambda a_2,\dots),$$

dann erkennen wir eine äquivalente Bedingung dafür, dass λ ein Eigenwert von S ist, als

$$\begin{aligned}a_2&=\lambda a_1\\a_3&=\lambda a_2=\lambda^2a_1\\&\vdots\\a_{n+1}&=\lambda^na_1.\end{aligned}$$

Für $\lambda\in\mathbb{R}$ ist also $(b_n)^{\lambda}_{n\in\mathbb{N}}=(1,\lambda,\lambda^2,\dots,\lambda^{n-1},\dots)$ ein Eigenvektor von S zum Eigenwert λ. Umgekehrt ist jeder Eigenvektor von S zum Eigenwert λ ein Vielfaches von $(b_n)^{\lambda}_{n\in\mathbb{N}}$. Folglich ist jeder Wert $\lambda\in\mathbb{R}$ ein Eigenwert von S mit dem zugehörigen Eigenraum $\operatorname{span}\left((b_n)^{\lambda}_{n\in\mathbb{N}}\right)$.

Aufgabe G4 (Eigenwerte von Drehmatrizen)

(a) Es seien $a,b\in\mathbb{R}$. Berechnen Sie die (eventuell komplexen) Eigenwerte der Matrix

$$A=\begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix}.$$

(b) Berechnen Sie die (eventuell komplexen) Eigenwerte der Matrix einer Drehung im $\mathbb{R}^2$ um den Koordinatenursprung um einen Winkel $\varphi\in\mathbb{R}$.

Lösung:

(a) Es gilt

$$\det(A-\lambda E)=\det\begin{pmatrix}a-\lambda&-b\\b&a-\lambda\end{pmatrix}=(a-\lambda)^2+b^2=\lambda^2-2a\lambda+a^2+b^2.$$

Die Nullstellen dieses Polynoms sind offensichtlich

$$\lambda_{1/2}=a\pm\sqrt{a^2-(a^2+b^2)}=a\pm\sqrt{-b^2}=a\pm ib,$$

d. h. die Eigenwerte von A sind $a+ib$ und $a-ib$.

(b) Man bestimmt die Matrix der Drehung bzgl. der Standardbasis des $\mathbb{R}^2$. Diese ergibt sich zu

$$\begin{pmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi\\\sin\varphi&\cos\varphi\end{pmatrix}.$$

Aus Aufgabenteil (a) folgt dann, dass die gesuchten Eigenwerte gleich

$$\cos\varphi+i\sin\varphi=e^{i\varphi}\quad\text{und}\quad\cos\varphi-i\sin\varphi=e^{-i\varphi}$$

sind.

Hausübung

Aufgabe H1 (Eigenwerte beim Invertieren) (6 Punkte)

(a) Sei v ein Eigenvektor der invertierbaren Matrix A zum Eigenwert λ. Zeigen Sie, dass v dann auch Eigenvektor von A^{-1} zum Eigenwert λ^{-1} ist.

(b) Sei v ein Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert λ und s ein Skalar. Zeigen Sie, dass v ein Eigenvektor von $A-sE$ zum Eigenwert $\lambda - s$ ist.

(c) Bestimmen Sie die Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

(a) Sei λ Eigenwert von A und v ein dazugehöriger Eigenvektor. Dann gilt $Av = \lambda v$. Da A invertierbar ist, existiert A^{-1} und es gilt $\lambda \neq 0$. Durch Linksmultiplikation mit A^{-1} ergibt sich nun $v = \lambda A^{-1} v$ und durch anschließende Division durch λ erhalten wir $A^{-1}v = \lambda^{-1}v$. Also ist v tatsächlich ein Eigenvektor von A^{-1} zum Eigenwert λ^{-1}.

(b) Aus $Av = \lambda v$ und $sEv = sv$ erhält man durch Subtraktion: $Av - sEv = \lambda v - sv$. Durch Ausklammern ergibt sich nun $(A-sE)v = (\lambda - s)v$, also ist v ein Eigenvektor von $A-sE$ zum Eigenwert $\lambda - s$.

(c)
- Die charakteristische Gleichung von A lautet

$$\det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 2 & 3 \\ -2 & 3-\lambda & 2 \\ -4 & 2 & 5-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = 0.$$

  Sie hat die Lösungen $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = 3$, die Eigenwerte von A. Durch Lösen der drei homogenen Gleichungssysteme

$$\begin{pmatrix} -2-\lambda_j & 2 & 3 \\ -2 & 3-\lambda_j & 2 \\ -4 & 2 & 5-\lambda_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad j = 1,2,3$$

  erhält man als Eigenvektoren:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ zum Eigenwert } \lambda_1, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ zum Eigenwert } \lambda_2, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ zum Eigenwert } \lambda_3.$$

- Da A invertierbar ist, sind nach (a) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ und $\lambda_3 = \frac{1}{3}$ die Eigenwerte von A^{-1}. Die Eigenvektoren sind die gleichen wie für A, ebenfalls nach (a).
- Man erkenne

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix} = A - 3E_3$$

  und erhält aus (b), dass die Eigenwerte nun $\lambda_1 = 1-3 = -2$, $\lambda_2 = 2-3 = -1$ und $\lambda_3 = 3-3 = 0$ sind. Die jeweils zugehörigen Eigenvektoren sind wieder die Gleichen wie für A.

Aufgabe H2 (Rang einer linearen Abbildung) (6 Punkte)

Bestimmen Sie den Rang der linearen Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 4x_4 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 11x_4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 + x_4 \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 10x_4 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie außerdem Basen von Kern φ und Bild φ an.

Lösung: Bezüglich der Standardbasis B von $\mathbb{R}^4$ hat φ die Matrixdarstellung

$$A = {}_B\varphi_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & 1 & 11 \\ 2 & -3 & 7 & 1 \\ 4 & 2 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Wir bestimmen nun zunächst den Kern von φ, bzw. von A. Hierzu verwenden wir das Gauß-Verfahren:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & 1 & 11 \\ 2 & -3 & 7 & 1 \\ 4 & 2 & 6 & 10 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -7 & 7 & -7 \\ 0 & -6 & 6 & -6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Eine Basis von Kern φ ist also beispielsweise $(-2,1,1,0)^T$, $(-2,-1,0,1)^T$. Insbesondere ist Kern φ zweidimensional. Mit der Dimensionsformel folgt nun, dass Bild φ ebenfalls zweidimensional sein muss. Folglich hat φ den Rang 2 und die offensichtlich linear unabhängigen Spalten $(1,3,2,4)^T$ und $(2,5,-3,2)^T$ von A bilden eine Basis von Bild φ.

Aufgabe H3 (Potenzen linearer Abbildungen) (6 Punkte)
Gegeben sei die lineare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2iy \\ x + 2y + iy \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine explizite Darstellung von $\varphi^n(e_1) = (\underbrace{\varphi \circ \ldots \circ \varphi}_{n \text{ mal}})(e_1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei $e_1 = (1,0)^T$.

Tipp: Beschreiben Sie φ bezüglich einer Basis aus Eigenvektoren.

Lösung: Bezüglich der Standardbasis B von $\mathbb{C}^2$ hat φ die Matrixdarstellung

$$A = {}_B\varphi_B = \begin{pmatrix} 0 & -2i \\ 1 & 2+i \end{pmatrix}.$$

Um $\varphi^n(e_1)$ zu berechnen, ist es sinnvoll, eine Basis aus Eigenvektoren von φ, bzw. A zu finden. Hierzu bestimmen wir zunächst die Eigenwerte von A mit Hilfe der charakteristischen Gleichung:

$$0 \overset{!}{=} \det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -2i \\ 1 & 2+i-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (2+i)\lambda + 2i.$$

Die Eigenwerte sind folglich

$$\lambda_{1/2} = \frac{2+i}{2} \pm \sqrt{\frac{3+4i}{4} - 2i} = \frac{2+i}{2} \pm \frac{2-i}{2},$$

also $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = i$. Als Nächstes berechnen wir die zugehörigen Eigenvektoren:

$$0 \overset{!}{=} (A - \lambda_1 E)v = \begin{pmatrix} -2 & -2i \\ 1 & i \end{pmatrix} v \quad \Leftrightarrow \quad v \in \operatorname{span}\begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad v_1 = \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix},$$
$$0 \overset{!}{=} (A - \lambda_2 E)v = \begin{pmatrix} -i & -2i \\ 1 & 2 \end{pmatrix} v \quad \Leftrightarrow \quad v \in \operatorname{span}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt also $\varphi(v_1) = 2v_1$ und $\varphi(v_2) = iv_2$. Daraus folgt insbesondere $\varphi^n(v_1) = 2^n v_1$ und $\varphi^n(v_2) = i^n v_2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen $e_1 = \frac{1}{5}(2+i)(v_2 - v_1)$ erhalten wir somit schließlich

$$\varphi^n(e_1) = \varphi^n\left(\frac{1}{5}(2+i)(v_2 - v_1)\right) = \frac{1}{5}(2+i)(\varphi^n(v_2) - \varphi^n(v_1)) = \frac{1}{5}(2+i)(i^n v_2 - 2^n v_1) = \frac{1}{5}(2+i)\begin{pmatrix} 2i^n - 2^n i \\ 2^n - i^n \end{pmatrix}.$$