Lineare Algebra für Physiker
8. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Matthias Schneider
Dr. Silke Horn
Dipl.-Math. Dominik Kremer

SS 2013
11./14. Juni 2013

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Dimensionsformel)
Zeigen Sie, dass es keine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ gibt mit

$$\operatorname{im} f = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right) \quad \text{und} \quad \ker f = \operatorname{span}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Lösung: Angenommen, es gäbe eine solche lineare Abbildung f. Dann wäre $\dim(\operatorname{im} f) = 2$, da die beiden Vektoren im Span linear unabhängig sind, und $\dim(\ker f) = 1$. Nach dem Dimensionssatz muss nun gelten: $4 = \dim(\operatorname{im} f) + \dim(\ker f) = 2 + 1 = 3$, was den gewünschten Widerspruch liefert.

Aufgabe G2 (Basiswechsel)
Wir betrachten die $\mathbb{R}$-Vektorräume $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ mit den Basen

$$B = \left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) \quad \text{bzw.} \quad C = \left(\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$$

sowie den Standardbasen

$$E_2 = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) \quad \text{bzw.} \quad E_3 = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

Eine lineare Abbildung $\psi \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ ist gegeben durch

$$_B\psi_C := \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 4 & 5\end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung $_{E_2}\psi_{E_3}$ von ψ bezüglich der Basen E_3 und E_2.

(b) Gegeben sei weiterhin ein Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ durch $v_{E_3} = \begin{pmatrix}6\\7\\8\end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\psi(v)_B$.

Lösung:

(a) Es gilt

$$_{E_2}\psi_{E_3} = {}_{E_2}\mathrm{id}_B \cdot {}_B\psi_C \cdot {}_C\mathrm{id}_{E_3} = {}_{E_2}\mathrm{id}_B \cdot {}_B\psi_C \cdot \left({}_{E_3}\mathrm{id}_C\right)^{-1}.$$

Aus der Gestalt der Basen ergibt sich sofort

$$_{E_2}\mathrm{id}_B = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad _{E_3}\mathrm{id}_C = \begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\1 & 0 & 1\\-1 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Die Inverse der letzten Matrix bestimmt man mit Hilfe des Gauß-Algorithmus.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{I+II}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{II-I,\, III+1}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{I+II,\, III\cdot\frac{1}{2}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \overset{I-III,\, II+III}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Folglich gilt

$$\left({}_{E_3}\mathrm{id}_C\right)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und mit Hilfe der ersten Formel ergibt sich

$${}_{E_2}\psi_{E_3} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 6 & 4 \\ -2 & 12 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Es gilt $\psi(v)_B = {}_B\psi_C \cdot v_C$ und $v_C = {}_C\mathrm{id}_{E_3} \cdot v_{E_3} = \left({}_{E_3}\mathrm{id}_C\right)^{-1} v_{E_3}$. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \psi(v)_B &= {}_B\psi_C \cdot \left({}_{E_3}\mathrm{id}_C\right)^{-1} \cdot v_{E_3} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 21 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 74 \\ 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 \\ 60 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe G3 (Injektivität und Surjektivität)
Es seien V und W endlichdimensionale Vektorräume und $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Ersetzen Sie in den folgenden drei Aussagen die Fragezeichen so, dass die Aussagen wahr sind, und beweisen Sie jeweils ihre Richtigkeit.

(a) φ ist surjektiv $\Leftrightarrow \dim(\operatorname{im}\varphi) = ?$

(b) φ ist injektiv $\Leftrightarrow \dim(\ker\varphi) = ?$

(c) φ ist bijektiv $\Leftrightarrow \dim V = ?$ und $\dim(\ker\varphi) = ?$

Betrachten Sie nun den $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \left\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{R} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\right\}$ der reellen Zahlenfolgen.

(d) Zeigen Sie dass es eine lineare Abbildung $\varphi_1 : V \to V$ gibt, die injektiv, aber nicht surjektiv ist.

(e) Zeigen Sie dass es eine lineare Abbildung $\varphi_2 : V \to V$ gibt, die surjektiv, aber nicht injektiv ist.

Lösung:

(a) Es gilt: φ ist surjektiv $\Leftrightarrow \dim(\operatorname{im}\varphi) = \dim W$.

Beweis:

- Angenommen φ ist surjektiv, dann gilt nach Definition $\operatorname{im}\varphi = W$ und damit auch $\dim(\operatorname{im}\varphi) = \dim W$.
- Angenommen, es gilt $\dim(\operatorname{im}\varphi) = \dim W$. Dann folgt $\operatorname{im}\varphi = W$, d. h. φ ist surjektiv.

(b) φ ist injektiv $\Leftrightarrow \dim(\ker\varphi) = 0$.

Beweis:

Dies folgt sofort aus den Aussagen „φ ist injektiv genau dann, wenn $\ker\varphi = \{0\}$“ und „$\dim U = 0$ genau dann, wenn $U = \{0\}$“ für einen beliebigen Vektorraum U.

(c) φ ist bijektiv $\Leftrightarrow \dim V = \dim W$ und $\dim(\ker\varphi) = 0$.
Beweis:
Mit Hilfe der Dimensionsformel $\dim(\operatorname{im}\varphi) + \dim(\ker\varphi) = \dim V$ und den Aufgabenteilen (a) und (b) ergibt sich

$$\begin{aligned} \varphi \text{ ist bijektiv} &\Leftrightarrow \varphi \text{ ist injektiv und surjektiv} \\ &\Leftrightarrow \dim(\ker\varphi) = 0 \text{ und } \dim(\operatorname{im}\varphi) = \dim W \\ &\Leftrightarrow \dim V = \dim W \text{ und } \dim(\ker\varphi) = 0. \end{aligned}$$

(d) Wir betrachten die Abbildung $\varphi_1 \colon V \to V$, die definiert ist durch

$$\varphi_1\left((a_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ mit } b_1 = 0, b_{i+1} = a_i \text{ für alle } i \in \mathbb{N}.$$

Diese Abbildung verschiebt die Folgenglieder um eins nach hinten und ergänzt eine Null als erstes Folgenglied. Offenbar ist φ_1 injektiv, denn wenn man zwei verschiedene Zahlenfolgen verschiebt, so sind die Bilder verschieden. Dennoch ist φ_1 nicht surjektiv, da jede Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_1 \neq 0$ nicht im Bild von φ_1 liegt.

(e) Wir betrachten die Abbildung $\varphi_2 \colon V \to V$, die definiert ist durch

$$\varphi_2\left((a_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ mit } b_i = a_{i+1} \text{ für alle } i \in \mathbb{N}.$$

Diese Abbildung verschiebt die Folgenglieder um eins nach vorn und „vergisst“ das erste Folgenglied. Offenbar ist φ_2 surjektiv, denn für eine beliebige Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt $\varphi_2\left((b_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls $b_1 = 0$ und $b_{n+1} = a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dennoch ist φ_2 nicht injektiv, denn die Folgen $(0,0,0,\dots)$ und $(1,0,0,\dots)$ haben das gleiche Bild unter φ_2.

Aufgabe G4 (Determinante einer Abbildung)
Wir betrachten die folgende Abbildung:

$$f : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R}), \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a - 6b + 4c + 3d & 2b + c + 3d \\ -3b + 2d & d - b \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $\det f$.

Lösung: Die Linearität von f ist klar oder man rechnet sie schnell nach. Um die Determinante zu berechnen, bestimmen wir zunächst eine Matrixdarstellung von f. Als Basis wählen wir

$$B = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{b_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{b_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{b_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{b_4} \right).$$

Wir bestimmen nun die Bilder dieser Basisvektoren bezüglich B:

$$f(b_1)_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(b_2)_B = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad f(b_3)_B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(b_4)_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bezüglich B lautet die Matrixdarstellung von f also

$${}_Bf_B = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat bereits Blockdiagonalgestalt. Der obere linke Block hat hierbei Determinante 1. Den unteren rechten Block entwickeln wir nach der zweiten Spalte und damit folgt

$$\det(f) = \det({}_Bf_B) = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Eine andere Wahl der Basis würde zu einer anderen Matrixdarstellung führen. Die Determinante bliebe aber gleich.

Hausübung

Aufgabe H1 (Darstellung linearer Abbildungen)
Wir betrachten endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume V und W sowie eine lineare Abbildung $\varphi \in L(V,W)$. Zeigen Sie, dass dann Basen B von V und C von W existieren, bezüglich denen φ die Blockdarstellung

$$_C\varphi_B = \left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

besitzt. Hierbei bezeichnet E eine Einheitsmatrix und 0 steht für Nullmatrizen geeigneter Dimension.

Lösung: Da φ eine lineare Abbildung ist, ist $U = \mathrm{im}(\varphi)$ ein Untervektorraum von W. Wir wählen eine Basis $(w_1,\dots,w_r)$ von U und vervollständigen sie mit Hilfe des Basisergänzungssatzes zu einer Basis $C = (w_1,\dots,w_m)$ von W. Als Nächstes wählen wir Vektoren $v_1,\dots,v_r \in V$ mit $\varphi(v_i) = w_i$ für $i = 1,\dots,r$. Die Vektoren $v_{r+1},\dots,v_n$ wählen wir schließlich als eine Basis von $\ker(\varphi)$. Wir behaupten, dass $B = (v_1,\dots,v_n)$ dann eine Basis von V ist. Trifft dies zu, haben wir die gesuchten Basen gefunden, denn $\varphi(v_i) = w_i$ für $i = 1,\dots,r$ und $\varphi(v_i) = 0$ für $i = r+1,\dots,n$.

Um die Behauptung zu beweisen, zeigen wir zunächst, dass die v_i linear unabhängig sind. Hierzu nehmen wir an, dass $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0$. Dann folgt

$$0 = \varphi\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(v_i) = \sum_{i=1}^r \lambda_i w_i$$

und somit $\lambda_i = 0$ für $i = 1,\dots,r$ aufgrund der linearen Unabhängigkeit der Basisvektoren w_i. Die verbleibenden Vektoren $v_{r+1},\dots,v_n$ sind aber schon nach Konstruktion linear unabhängig und somit folgt $\lambda_i = 0$ für alle i, also die lineare Unabhängigkeit von B. Aus der Dimensionsformel ergibt sich weiterhin

$$n = (n-r) + r = \dim\big(\ker(\varphi)\big) + \dim\big(\mathrm{im}(\varphi)\big) = \dim(V).$$

Folglich ist B ein maximales System linear unabhängiger Vektoren in V und somit tatsächlich eine Basis.

Übrigens: Die Konstante r ist nach Konstruktion genau die Dimension von $\mathrm{im}(\varphi)$, also der Rang von φ. Wir haben also gezeigt, dass man jede lineare Abbildung φ bezüglich geeigneter Basen durch eine Matrix beschreiben kann, die (neben den Dimensionen von V und W) nur von $\mathrm{rang}(\varphi)$ abhängt.

Aufgabe H2 (Basiswechsel im Polynomraum)
Wie üblich bezeichne $\mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ die Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad kleiner gleich n. Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi : \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_3(\mathbb{R}) \quad \text{mit } \varphi(p)(x) = x p(x),$$

die Elemente $p_i(x) = x^i$, $q_i(x) = (x-1)^i$ für $i = 0,1,\dots,3$ und die Basen

$$\begin{aligned} B &= (p_0,p_1,p_2), \\ C &= (p_0,p_1,p_2,p_3), \\ C' &= (q_0,q_1,q_2,q_3) \end{aligned}$$

von $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ bzw. von $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$. Bestimmen Sie $_C\varphi_B$ und $_{C'}\varphi_B$.

Lösung: Um $_B\varphi_C$ zu bestimmen, betrachten wir die Bilder der Basisvektoren aus B unter φ. Es gilt

$$\varphi(p_0) = p_1, \quad \varphi(p_1) = p_2, \quad \text{und} \quad \varphi(p_2) = p_3.$$

Daraus ergibt sich direkt

$$_C\varphi_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $_{C'}\varphi_B = {}_{C'}\mathrm{id}_C \cdot {}_C\varphi_B$. Außerdem ist die Matrix $_{C'}\mathrm{id}_C$ gleich der zu $_C\mathrm{id}_{C'}$ inversen Matrix. Um $_C\mathrm{id}_{C'}$ zu berechnen, stellen wir die Elemente von C' bzgl. der Basis C dar.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 1 & = & 1 & & & & & & \\ (x-1) & = & -1 & + & x & & & & \\ (x-1)^2 & = & 1 & - & 2x & + & x^2 & & \\ (x-1)^3 & = & -1 & + & 3x & - & 3x^2 & + & x^3. \end{array}$$

Also gilt

$$_C\mathrm{id}_{C'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Inverse dieser Matrix bestimmt man wie folgt mittels des Gauß-Algorithmus.

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{I+II}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{I+III,\, II+2\cdot III}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{I+IV,\, II+3\cdot IV,\, III+3\cdot IV}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Es ergibt sich also

$$_{C'}\mathrm{id}_C = \left(_C\mathrm{id}_{C'}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und somit

$$_{C'}\varphi_B = {_{C'}\mathrm{id}_C} \cdot {_C\varphi_B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H3 (Transponieren als lineare Abbildung)
Es sei $M_n(\mathbb{K})$ der Raum der $n \times n$-Matrizen über $\mathbb{K}$. Nehmen Sie $n = 2$ an und bestimmen Sie Spur und Determinante der linearen Abbildung

$$\varphi : M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K}), \quad A \mapsto A^T$$

Bonus: Bestimmen Sie Spur und Determinante bei beliebiger Dimension n.

Lösung: Als Basis von $M_2(\mathbb{K})$ wählen wir zunächst

$$B = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{b_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{b_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{b_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{b_4} \right).$$

Bezüglich dieser Basis können wir die Bilder der Basisvektoren leicht angeben:

$$\varphi(b_1) = b_1, \quad \varphi(b_2) = b_2, \quad \varphi(b_3) = b_4, \quad \varphi(b_4) = b_3.$$

Folglich ist die Matrix von φ bezüglich B

$$_B\varphi_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{$*$}$$

Es handelt sich um eine Permutationsmatrix mit Spur 2 und Determinante -1. Also gilt $\mathrm{tr}(\varphi) = 2$ und $\det(\varphi) = -1$.

Bonus: Auch im allgemeinen Fall muss man zunächst eine geeignete Basis von $M_n(\mathbb{K})$ finden. Es bietet sich an, als Basisvektoren wieder Matrizen zu benutzen, die jeweils in nur einem Eintrag von Null verschieden und dort gleich Eins sind. Von dieser Art gibt es n Matrizen mit einer Eins auf der Diagonalen und $n^2 - n$ übrige. Matrizen vom ersten Typ werden unter φ stets auf sich selbst abgebildet, Matrizen vom zweiten Typ vertauschen unter φ paarweise. Also ergibt sich (bei geschickter Anordnung der Basisvektoren) wiederum eine Blockdiagonalmatrix wie in $(*)$, die nun n 1×1-Blöcke (1) und $\frac{1}{2}(n^2-n)$ 2×2-Blöcke $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ umfasst. Mit diesem Wissen errechnet man leicht:

$$\operatorname{tr}(\varphi) = n \qquad \text{und} \qquad \det(\varphi) = (-1)^{\frac{1}{2}(n^2-n)} = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \equiv 0,1 \bmod 4 \\ -1 & \text{falls } n \equiv 2,3 \bmod 4 \end{cases}.$$