Lineare Algebra für Physiker
7. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Matthias Schneider
Dr. Silke Horn
Dipl. Math. Dominik Kremer

SS 2013
4./7. Juli 2013

Gruppenübung

Aufgabe G1
Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Unterräumen U und W. Zeigen Sie:

(a) $U+W := \{u+w \mid u \in U, w \in W\}$ ist ein Unterraum von V, die sogenannte *Summe* von U und W.

(b)
$$V = U \oplus W \qquad \Longleftrightarrow \qquad V = U+W \text{ und } U \cap W = \{0\}.$$

(c) Ist V endlichdimensional mit $V = U \oplus W$, so gilt $\dim V = \dim U + \dim W$.

Lösung:

(a) Wir rechnen einfach die Untervektorraumaxiome nach:
  i. $0 = 0 + 0 \in U + W$.
  ii. $u+w,\, u'+w' \in U+W \Rightarrow (u+w)+(u'+w') = (u+u')+(w+w') \in U+W$.
  iii. $u+w \in U+W,\, \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda(u+w) = \lambda u + \lambda w \in U+W$.

(b) Nach Definition gilt $V = U \oplus W$ genau dann, wenn sich jedes Element $v \in V$ auf eindeutige Weise als Summe zweier Elemente $u \in U$ und $w \in W$ schreiben lässt.
  $\Rightarrow$) Da sich jedes Element von V als Summe zweier Elemente in U und W schreiben lässt, folgt zunächst $V = U+W$. Weiterhin können wir $v \in U \cap W$ sowohl als $v = v + 0 \in U \oplus W$, als auch als $v = 0 + v \in U \oplus W$ schreiben. Aufgrund des Eindeutigkeit der Zerlegung folgt dann $v = 0$, also $U \cap W = \{0\}$.
  $\Leftarrow$) Wegen $V = U + W$ können wir jedes Element $v \in V$ als Summe zweier Elemente $u \in U$ und $w \in W$ schreiben. Zu zeigen bleibt also lediglich, dass eine solche Zerlegung eindeutig ist. Hierzu nehmen wir an, dass $v = u + w = u' + w' \in U + W$. Dann ist $u - u' = w' - w \in U \cap W = \{0\}$, so dass $u = u'$ und $w = w'$ folgt.

(c) Es sei $u_1, \dots, u_n$ eine Basis von U und $w_1, \dots, w_m$ eine Basis von W. Dann reicht es zu zeigen, dass $u_1, \dots, u_n, w_1, \dots, w_m$ eine Basis von V ist. Tatsächlich bilden die Vektoren ein Erzeugendensystem, denn jeder Vektor $v \in V$ besitzt eine Zerlegung $v = u + w \in U + W$ mit $u = \lambda_1 u_1 + \dots \lambda_n u_n$ und $w = \mu_1 w_1 + \dots + \mu_m w_m$. Um lineare Unabhängigkeit zu zeigen, nehmen wir an, dass

$$\underbrace{\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n}_{=u} + \underbrace{\mu_1 w_1 + \dots + \lambda_m \mu_m}_{=w} = 0.$$

Dann folgt $u = -w \in U \cap W = \{0\}$, also $u = w = 0$ und somit

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = 0 \qquad \text{und} \qquad \mu_1 w_1 + \dots + \lambda_m \mu_m = 0.$$

Aufgrund der linearen Unabhängigkeit der Basen $u_1, \dots, u_n$ und $w_1, \dots, w_m$ folgt dann $\lambda_i = 0$ für $i = 1, \dots, n$, bzw. $\mu_i = 0$ für $i = 1, \dots, m$.

Aufgabe G2
Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie:

$$\langle a \times b, c \times d \rangle = \langle a, c \rangle \langle b, d \rangle - \langle a, d \rangle \langle b, c \rangle$$

Lösung: Es gilt

$$
\begin{aligned}
\langle a \times b, c \times d \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_2 d_3 - c_3 d_2 \\ c_3 d_1 - c_1 d_3 \\ c_1 d_2 - c_2 d_1 \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= (a_2 b_3 - a_3 b_2)(c_2 d_3 - c_3 d_2) + (a_3 b_1 - a_1 b_3)(c_3 d_1 - c_1 d_3) + (a_1 b_2 - a_2 b_1)(c_1 d_2 - c_2 d_1) \\
&= (a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3)(b_1 d_1 + b_2 d_2 + b_3 d_3) - (a_1 d_1 + a_2 d_2 + a_3 d_3)(b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3) \\
&= \langle a, c \rangle \langle b, d \rangle - \langle a, d \rangle \langle b, c \rangle.
\end{aligned}
$$

Aufgabe G3

Die lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ sei definiert durch

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \\ s \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - y + s + t \\ x + 2s - t \\ x + y + 3s - 3t \end{pmatrix}.
$$

Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension von $\mathsf{Bild}\,\phi$ und von $\ker \phi$.

Lösung: Wir bestimmen zunächst den Kern von ϕ. Er besteht aus all jenen Vektoren $(x, y, s, t)^T$, für die gilt

$$
\phi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ s \\ t \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x & -y & +s & +t \\ x & & +2s & -t \\ x & +y & +3s & -3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x & -y & +s & +t \\ & y & +s & -2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

Die Vektoren $(-2, -1, 1, 0)^T, (1, 2, 0, 1)^T$ bilden also eine Basis des zweidimensionalen Raums $\ker \phi$.

Nun suchen wir noch eine Basis des Bildes von ϕ. Es besteht aus allen Vektoren

$$
\phi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ s \\ t \end{pmatrix}\right) = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}
$$

mit $x, y, s, t \in \mathbb{R}$. Insbesondere bilden die vier Vektoren auf der rechten Seite also ein Erzeugendensystem von $\operatorname{im} \phi$. Durch Gaußsche Elimination erhalten wir daraus eine Basis, etwa $(1, 1, 1)^T$, $(-1, 0, 1)$. Folglich ist der Raum $\operatorname{im} \phi$ wiederum zweidimensional.

Aufgabe G4

Die Berechnung einer Determinante kann als sehr effiziente Methode eingesetzt werden, um die lineare Unabhängigkeit von Vektoren oder die Invertierbarkeit einer Matrix zu zeigen. In dieser Aufgabe soll ein Zugang zum Verständnis dieser Methode gegeben werden.

(a) Das Kreuzprodukt zweier Vektoren des $\mathbb{R}^3$ hat als Betrag die Fläche, die das durch die Vektoren aufgespannte Parallelogramm aufspannt. Seien nun zwei Vektoren $a = \binom{a_1}{a_2}$ und $b = \binom{b_1}{b_2}$ aus $\mathbb{R}^2$ gegeben, Zeigen Sie, dass für die zwei Vektoren a, b gilt:

$$
\left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \det\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\right) \right|
$$

(b) Zeigen Sie, dass für drei Vektoren $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ das Spatprodukt $\langle u, v \times w \rangle$ der drei Vektoren mit der Determinante der Matrix, deren Spalten die Vektoren u, v, w sind, übereinstimmt.

(c) Wie würden Sie das Volumen im Raum $\mathbb{R}^n$ definieren, welches das Parallelepiped besitzt, das von n gegebenen Vektoren aufgespannt wird?

(d) Formulieren Sie ein Kriterium um mit der Determinante n Vektoren im $\mathbb{R}^n$ auf lineare Unabhängigkeit zu testen und begründen Sie es anschaulich. Begründen Sie, dass Sie mit dem gleichen Kriterium auch die Invertierbarkeit einer $n \times n$ Matrix testen können.

(e) Verwenden Sie Ihr Kriterium, um die folgenden Vektoren auf lineare Abhängigkeit zu testen.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Verwenden Sie außerdem Ihr Kriterium, um die folgende Matrix auf Invertierbarkeit zu testen.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -5 & 3 & -7 \\ 2 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

Lösung:

(a) Die Gleichheit zeigt sich durch eine direkte Rechnung. Einerseits gilt

$$\left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \right| = |a_1 b_2 - a_2 b_1|$$

Andererseits ist

$$\left| \det\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \right) \right| = |a_1 b_2 - a_2 b_1|$$

Damit ist die Gleichheit gezeigt.

(b) Auch hier ist die Gleichheit durch direkte Rechnung zu zeigen:

$$\begin{aligned} \langle u, (v \times w) \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= u_1(v_2 w_3 - v_3 w_2) + u_2(v_3 w_1 - v_1 w_3) + u_3(v_1 w_2 - v_2 w_1) \\ &= u_1 v_2 w_3 + v_1 w_2 u_3 + w_1 u_2 v_3 - u_1 w_2 v_3 - v_1 u_2 w_3 - w_1 v_2 u_3 \\ &= \det\left(\begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

(c) Eine Definition, die durch die vorigen Aufgaben nahegelegt wird, ist das Volumen über den Betrag der Determinante der $n \times n$ Matrix zu definieren, deren Spalten gerade die n Vektoren sind, die das Parallelepiped aufspannen.

(d) Um eine Menge von n Vektoren auf lineare Unabhängigkeit zu testen, berechnet man wie in (c) beschrieben das Volumen des aufgespannten Parallelepipeds, also die Determinante der Matrix mit den Vektoren als Spalten. Ist diese Determinante 0, so sind die Vektoren linear abhängig, ansonsten sind sie es nicht. Ist eine Matrix invertierbar, so sind ihre Spalten linear unabhängig. Entsprechend gilt das gleiche Kriterium auch für die Invertierbarkeit von Matrizen; es gilt: A ist invertierbar genau dann wenn $\det(A) \neq 0$ ist.

(e) Nach dem Kriterium berechnen wir die folgende Determinante.

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \right) = 44$$

Die Vektoren sind also linear unabhängig.
Auch für die Matrix berechnet man dem Kriterium nach die folgende Determinante.

$$\det\left(\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -5 & 3 & -7 \\ 2 & -1 & 9 \end{pmatrix} \right) = 39$$

Die Matrix ist damit invertierbar.

Aufgabe H1 (6 Punkte)
Seien $a, b, c \in \mathbb{R}^3$.

(a) Beweisen Sie die *Jakobi-Identität*:

$$a \times (b \times c) + c \times (a \times b) + b \times (c \times a) = 0.$$

(b) Folgern Sie daraus

$$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c \quad \Longleftrightarrow \quad b \times (c \times a) = 0.$$

Lösung:

(a) Es gilt

$$a \times (b \times c) + c \times (a \times b) + b \times (c \times a) = (b\langle a, c\rangle - c\langle a, b\rangle) + (a\langle c, b\rangle - b\langle c, a\rangle) + (c\langle b, a\rangle - a\langle b, c\rangle) = 0.$$

(b) Es gilt

$$(a \times b) \times c = -c \times (a \times b) = a \times (b \times c) + b \times (c \times a)$$

und somit $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ genau dann, wenn $b \times (c \times a) = 0$.

Aufgabe H2 (6 Punkte)
Betrachten Sie die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 3x + 2y + z \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie durch konkretes Nachrechnen der definierenden Bedingung, dass f eine lineare Abbildung ist.

(b) Bestimmen Sie eine Matrix A, so dass $f(v) = Av$ für alle $v \in \mathbb{R}^3$ gilt.

(c) Bestimmen Sie den Kern von f. Dieser ist definiert durch

$$\ker(f) = f^{-1}(\{0\}) = f^{-1}(0) = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid f(v) = 0\}.$$

Lösung:

(a) Seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ und $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) &= f\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \\ \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \\ \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + 2(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) + 3(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) \\ 3(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + 2(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 + 2\lambda_1 y_1 + 3\lambda_1 z_1 + \lambda_2 x_2 + 2\lambda_2 y_2 + 3\lambda_2 z_2 \\ 3\lambda_1 x_1 + 2\lambda_1 y_1 + \lambda_1 z_1 + 3\lambda_2 x_2 + 2\lambda_2 y_2 + \lambda_2 z_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_1(x_1 + 2y_1 + 3z_1) + \lambda_2(x_2 + 2y_2 + 3z_2) \\ \lambda_1(3x_1 + 2y_1 + z_1) + \lambda_2(3x_2 + 2y_2 + z_2) \end{pmatrix} \\
&= \lambda_1 \begin{pmatrix} x_1 + 2y_1 + 3z_1 \\ 3x_1 + 2y_1 + z_1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} x_2 + 2y_2 + 3z_2 \\ 3x_2 + 2y_2 + z_2 \end{pmatrix} \\
&= \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2).
\end{aligned}$$

Dies ist gerade die definierende Gleichung der linearen Abbildungen.

(b) Für $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ und $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ gilt

$$Av = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+3z \\ 3x+2y+z \end{pmatrix} = f(v)\,.$$

Diese Matrix A ist also die gesuchte.

(c) Für $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ gilt $f(v) = 0$ genau dann, wenn $\begin{pmatrix} x+2y+3z \\ 3x+2y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist. Dies ist ein lineares Gleichungssystem.

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ 3x & + & 2y & + & z & = & 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ & & -4y & - & 8z & = & 0 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ & & y & + & 2z & = & 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcrcrcl} x & + & & - & z & = & 0 \\ & & y & + & 2z & = & 0 \end{array}$$

Die Lösungen dieses Gleichungssystems sind $\ker(f) = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

Aufgabe H3 (6 Punkte)
Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung mit

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie eine Formel für $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$ für beliebige Elemente $x, y \in \mathbb{R}$.

(b) Bestimmen Sie $\ker f$.

Lösung:

(a) Für beliebige Elemente $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= f\left(x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = x \cdot f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + y \cdot f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = x \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x+y \\ 3x+4y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(b) Es gilt $\ker f = \{0\}$.