Lineare Algebra für Physiker
6. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Matthias Schneider
Dr. Silke Horn
Dipl. Math. Dominik Kremer

SS 2013
28./31. Mai 2013

Beachten Sie, dass Übung 6 (Michael Beckstein, Freitag, 8:00 in S1|03 126) am 31. Mai ausfällt. Bitte verteilen Sie sich auf die drei parallel stattfindenden Übungen:

Übung 3	S1|02 244
Übung 4	S1|03 175
Übung 5	S1|03 9

Gruppenübung

Aufgabe G1
Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Auf $\mathbb{R}^2$ ist durch
$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_2$$
ein Skalarprodukt definiert.

(b) Auf $\mathbb{R}$ ist durch
$$\langle x, y \rangle = |x|$$
ein Skalarprodukt definiert.

(c) Auf $\mathbb{R}^2$ ist durch
$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2$$
ein Skalarprodukt definiert.

(d) Auf $M_n(\mathbb{K})$ wird durch
$$\langle A, B \rangle = \operatorname{Tr}(B^* A)$$
ein Skalarprodukt definiert.

Lösung:

(a) Die Aussage ist falsch, denn $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist nicht positiv definit. Z.B. gilt
$$\langle (1,1), (1,1) \rangle = 1 - 1 = 0 \text{ aber } (1,1) \neq (0,0) = 0\,.$$

(b) Die Aussage ist falsch, denn $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist nicht symmetrisch. Z.B. gilt
$$\langle 1, 0 \rangle = 1 \neq 0 = \langle 0, 1 \rangle\ .$$

(c) Die Aussage ist falsch, denn $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist nicht bilinear. Z.B. gilt
$$\langle 2 \cdot (1,1), (1,1) \rangle = \langle (2,2), (1,1) \rangle = 4 + 4 = 8 \neq 4 = 2 \cdot (1+1) = 2\,\langle (1,1), (1,1) \rangle\ .$$

(d) Die Aussage ist wahr, denn für alle $A,B,C \in M_n(\mathbb{K})$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ folgt mit Hilfe der Eigenschaften der Spur

$$\begin{aligned}
\langle A+C,B\rangle &= \mathrm{Tr}(B^*(A+C)) = \mathrm{Tr}(B^*A+B^*C) = \mathrm{Tr}(B^*A)+\mathrm{Tr}(B^*C) = \langle A,B\rangle + \langle C,B\rangle \\
\langle \lambda\cdot A,B\rangle &= \mathrm{Tr}(B^*(\lambda\cdot A)) = \mathrm{Tr}(\lambda\cdot B^*A) = \lambda\cdot\mathrm{Tr}(B^*A) = \lambda\cdot\langle A,B\rangle \\
\langle A,B\rangle &= \mathrm{Tr}(B^*A) = \overline{\mathrm{Tr}((B^*A)^*)} = \overline{\mathrm{Tr}(A^*(B^*)^*)} = \overline{\mathrm{Tr}(A^*B)} = \overline{\langle B,A\rangle} \\
\langle A,A\rangle &= \mathrm{Tr}(A^*A) = a_1^*a_1 + a_2^*a_2 + \ldots + a_n^*a_n = \|a_1\|^2 + \|a_2\|^2 + \ldots + \|a_n\|^2 \geq 0 \\
\langle A,A\rangle = 0 &\Leftrightarrow \|a_1\|^2 + \|a_2\|^2 + \ldots + \|a_n\|^2 = 0 \Leftrightarrow a_i = 0\,\forall 1\leq i\leq n \Leftrightarrow A = 0\,.
\end{aligned}$$

Dabei bezeichnet a_i die i-te Spalte von A und $\|\cdot\|$ die Standardnorm im $\mathbb{R}^n$.

Aufgabe G2
Für einen Körper $\mathbb{K}$ betrachten wir den Raum

$$\ell^2(\mathbb{K}) = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty \right\}.$$

Zeigen Sie, dass durch

$$\langle (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{x_i} y_i$$

ein Skalarprodukt auf $\ell^2(\mathbb{K})$ definiert ist.

Hinweis: Zeigen Sie die Konvergenz, indem Partialsummen abschätzen.

Lösung: Es ist klar, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sesquilinear, hermitesch und positiv definit ist, sofern es wohl-definiert ist.

Wir zeigen die Konvergenz: Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{K})$. Es gilt $x := \sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2, y := \sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^2 < \infty$. Es gilt $2|\overline{x_i}y_i| = 2|x_i||y_i| \leq |x_i|^2 + |y_i|^2$ und damit für $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^{N} |\overline{x_i}y_i| \leq \sum_{i=1}^{N} \tfrac{1}{2}(|x_i|^2 + |y_i|^2) = \tfrac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N}|x_i|^2 + \sum_{i=1}^{N}|y_i|^2\right) \leq \tfrac{1}{2}(x+y).$$

Somit ist

$$\langle (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\rangle = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N} \overline{x_i} y_i$$

absolut konvergent und daher auch konvergent.

Aufgabe G3
Sei $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt versehen und sei $U \subset \mathbb{R}^4$ der von den Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 5\\5\\5\\5 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 2\\2\\4\\4 \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 7\\8\\9\\0 \end{pmatrix}$$

aufgespannte Untervektorraum. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U.

Lösung: Wir wenden das Gram-Schmidtsche Ortogonalisierungsverfahren an. Der erste Vektor muss lediglich auf Einheitslänge normiert werden:

$$v_1 := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1 \end{pmatrix}.$$

Für den zweiten Vektor erhält man:

$$\tilde{v}_2 := u_2 - \langle v_1, u_2\rangle v_1 = \begin{pmatrix} 2\\2\\4\\4 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\\-1\\1\\1 \end{pmatrix}$$

sowie

$$v_2 := \frac{\tilde{v}_2}{\|\tilde{v}_2\|} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für den dritten Vektor erhält man:

$$\tilde{v}_3 := u_3 - \langle v_1, u_3\rangle v_1 - \langle v_2, u_3\rangle v_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 9/2 \\ -9/2 \end{pmatrix}.$$

und somit

$$v_3 := \frac{\tilde{v}_3}{\|\tilde{v}_3\|} = \frac{2}{\sqrt{1^2+1^2+9^2+9^2}}\,\tilde{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{41}}\,\tilde{v}_3.$$

Aufgabe G4
Sei $w \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, mit $w_k > 0$, $k = 1, \ldots, n$. Zeigen Sie, dass

$$\langle u, v\rangle_w := \sum_{k=1}^{n} w_k \overline{u_k} v_k, \qquad \text{für } u, v \in \mathbb{C}^n,$$

ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{C}^n$ definiert.

Lösung: Wir zeigen die definierenden Eigenschaften:
positiv definit: Sei $u \in \mathbb{C}^n$. Dann gilt

$$\langle u, u\rangle_w = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{w_k |u_k|^2}_{\geq 0} \geq 0.$$

Ist $u \neq 0$, dann existiert $j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $u_j \neq 0$. Dann gilt

$$\langle u, u\rangle_w = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{w_k |u_k|^2}_{\geq 0} \geq w_j |u_j|^2 \overset{w_j>0}{>} 0\ .$$

hermitesch: Seien $u, v \in \mathbb{C}^n$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \overline{\langle u, v\rangle_w} &= \overline{\sum_{k=1}^{n} w_k \overline{u_k} v_k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \overline{w_k \overline{u_k} v_k} \\ &\overset{w_k \in \mathbb{R}}{=} \sum_{k=1}^{n} w_k \overline{v_k} u_k \\ &= \langle v, u\rangle_w. \end{aligned}$$

sesquilinear: Seien $u, v, r \in \mathbb{C}^n$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \langle u+v, r\rangle_w &= \sum_{k=1}^{n} w_k \overline{(u_k+v_k)} r_k = \sum_{k=1}^{n} w_k \overline{u_k} r_k + \sum_{k=1}^{n} w_k \overline{v_k} r_k = \langle u, r\rangle_w + \langle v, r\rangle_w, \\ \langle r, u+v\rangle_w &= \langle r, u\rangle_w + \langle r, v\rangle_w, \\ \langle \lambda u, v\rangle_w &= \sum_{k=1}^{n} w_k \overline{\lambda u_k} v_k = \overline{\lambda} \sum_{k=1}^{n} w_k \overline{u_k} v_k = \overline{\lambda}\langle u, v\rangle_w, \\ \langle u, \lambda v\rangle_w &= \sum_{k=1}^{n} w_k \overline{u_k} \lambda v_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} w_k \overline{u_k} v_k = \lambda \langle u, v\rangle_w. \end{aligned}$$

Aufgabe G5
Man zeige, dass w und $\overline{w}$ eine Basis von $\mathbb{C}$ über $\mathbb{R}$ bilden, wenn $w = a + bi$ und $a = \Re w \neq 0, b = \Im w \neq 0$ ist. Man berechne die Koordinaten der komplexen Zahl $z = x + iy$ relativ zu dieser Basis.

Lösung: Wir können die Basis $\{1, i\}$ von $\mathbb{C}$ über $\mathbb{R}$ durch w und $\overline{w}$ darstellen:

$$1 = \frac{w + \overline{w}}{|w + \overline{w}|} = \frac{1}{2|a|}(w + \overline{w}), \qquad i = \frac{w - \overline{w}}{|w - \overline{w}|} = \frac{1}{2|b|}(w - \overline{w}).$$

Die Zahl $x + iy$ kann man also durch

$$x + iy = x\frac{1}{2|a|}(w + \overline{w}) + y\frac{1}{2|b|}(w - \overline{w}) = \left(\frac{x}{2|a|} + \frac{y}{2|b|}\right)w + \left(\frac{x}{2|a|} - \frac{y}{2|b|}\right)\overline{w}$$

in dieser Basis darstellen.

Hausübung

Aufgabe H1 (6 Punkte)
Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\mathrm{Span}\{b_1, b_2, b_3\}$ mit

$$b_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad b_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Wir verwenden das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren.
Es ergeben sich die folgenden Schritte:

$$\begin{aligned}
u_1 &= b_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T \\
v_1 &= \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-1)^2 + 1^2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T \\
u_2 &= b_2 - \langle b_2, v_1 \rangle v_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T - \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T \\
&= \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}^T \\
v_2 &= \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{16} + \frac{9}{16} + \frac{9}{16} + \frac{9}{16}}} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T \\
u_3 &= b_3 - \langle b_3, v_1 \rangle v_1 - \langle b_3, v_2 \rangle v_2 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}^T - \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}^T \\
v_3 &= \frac{u_3}{\|u_3\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}}} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T
\end{aligned}$$

Folglich ist (v_1, v_2, v_3) eine Orthonormalbasis von $\mathrm{span}\{b_1, b_2, b_3\}$.

Bemerkung: Die lineare Unabhängigkeit der drei gegebenen Vektoren folgt daraus, dass man beim Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren drei von Null verschiedene Vektoren erhält. Alternativ kann man die lineare Unabhängigkeit auch vor dem Verfahren nachrechnen.

Aufgabe H2 (6 Punkte)
Sei $H_n = \{A \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid A^* = A\}$. Zeigen Sie, dass die Matrizen

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad b_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

bezüglich des Skalarprodukts

$$\langle A, B \rangle = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(A^* B)$$

eine Orthonormalbasis von H_2 bilden.

Lösung: Nachrechnen.

Aufgabe H3 (6 Punkte)
Man beweise mittels linearer Algebra die folgenden, aus der elementaren Geometrie bekannten Sätze:

(a) Satz des Thales: Es seien a, b, c drei verschiedene Punkte in der Ebene. Wenn c auf dem Kreis liegt, der die Verbindungsstrecke von a nach b als einen Durchmesser hat, so hat das aus a, b und c gebildete Dreieck bei c einen rechten Winkel. (Hinweis: Man lege den Ursprung des Koordinatensystems in den Mittelpunkt des Kreises.)

(b) Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt und dieser teilt jede Seitenhalbierende im Verhältnis 2 : 1. (Eine Seitenhalbierende in einem Dreieck ist die Strecke, die den Mittelpunkt einer Seite mit der gegenüberliegenden Ecke verbindet. Der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden ist der Schwerpunkt des Dreiecks.)

Lösung:

(a) Wir legen den Ursprung in den Mittelpunkt des Kreises. Somit gilt $a = -b$ und $\|a\| = \|b\| = \|c\|$. Außerdem folgt

$$\langle c-a, c-b\rangle = \langle c-a, c+a\rangle = \langle c, c\rangle - \langle a, a\rangle = \|c\| - \|a\| = 0.$$

(b) Seien $0, a, b$ die Ecken des Dreiecks. Die Seitenhalbierenden der Seiten a und b sind dann durch die Vektoren $\frac{a}{2} - b$ bzw. $\frac{b}{2} - a$ gegeben. Um zu bestimmen, in welchem Verhältnis der Schnittpunkt die Seitenhalbierenden teilt, betrachten wir

$$\begin{aligned} & a + \lambda_1(\tfrac{b}{2} - a) = b + \lambda_2(\tfrac{a}{2} - b) \\ \Leftrightarrow \quad & a(1 - \lambda_1 - \tfrac{\lambda_2}{2}) + b(\tfrac{\lambda_1}{2} - 1 + \lambda_2) = 0. \end{aligned}$$

Da a und b linear unabhängig sind, muss gelten

$$1 - \lambda_1 - \tfrac{\lambda_2}{2} = \tfrac{\lambda_1}{2} - 1 + \lambda_2 = 0$$

und somit $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{2}{3}$. Da a und b beliebige Seiten waren, folgt, dass auch die dritte Seitenhalbierende durch dieses Punkt geht.