Lineare Algebra für Physiker
5. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Matthias Schneider
Dr. Silke Horn
Dipl. Math. Dominik Kremer

SS 2013
21./24. Mai 2013

Gruppenübung

Aufgabe G1

Es seien A und B jeweils $n \times n$ Matrizen. Außerdem soll $A \cdot B = E_n$ gelten.

(a) Zeigen Sie, dass dann auch $B \cdot A = E_n$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass $A^{-1} = B$ und $B^{-1} = A$ ist.

Lösung:

(a) Angenommen es gilt $\det B = 0$. Dann folgt

$$1 = \det E_n = \det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B = \det A \cdot 0 = 0\,,$$

was ein Widerspruch ist. D. h. es gilt

$$\det B \neq 0\,.$$

Insbesondere existiert B^{-1}. Multipliziert man nun die gegebene Gleichung $A \cdot B = E_n$ von links mit B erhält man

$$B \cdot A \cdot B = B\,.$$

Durch Multiplikation mit B^{-1} von rechts erhält man daraus

$$B \cdot A = B \cdot A \cdot B \cdot B^{-1} = B \cdot B^{-1} = E_n\,.$$

(b) Wegen (a) gilt

$$A \cdot B = B \cdot A = E_n\,.$$

Nach Definition bedeutet dies gerade

$$A^{-1} = B \text{ und } B^{-1} = A\,.$$

Aufgabe G2

Sei $B = (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis des $\mathbb{K}$-Vektorraums V. Zeigen Sie: Die Vektoren $a_1, \dots, a_m \in V$ sind genau dann linear unabhängig, wenn ihre B-Koordinatenvektoren $A_1, \dots, A_m$ linear unabhängig sind.

Lösung: Es gilt $a_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} b_j$ für $i = 1, \dots, m$ und

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \sum_{j=1}^{n} A_{ij} b_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i A_{ij} \right) b_j \end{aligned}$$

genau dann, wenn $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i A_{ij} = 0$ für alle $j = 1, \dots, n$ genau dann, wenn $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i A_i = 0$. Folglich sind $a_1, \dots, a_m$ genau dann linear unabhängig, wenn $A_1, \dots, A_m$ linear unabhängig sind.

Aufgabe G3
Berechnen Sie (mit Hilfe einer Induktion nach $n \in \mathbb{N}$) die Determinante

$$V_n(x_1, \dots, x_n) := \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Dabei seien $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ beliebig und $n > 1$.

Lösung: Addiert man in der gegebenen Matrix zuerst das $(-x_1)$-fache der vorletzten Spalte zur letzten, dann das $(-x_1)$-fache der $(n-2)$-ten Spalte zur $(n-1)$-ten usw. und im letzten Schritt das $(-x_1)$-fache der ersten Spalte zur zweiten, so ändert sich die Determinate der Matrix dadurch nicht und man erhält

$$\begin{aligned} V_n(x_1, \dots, x_n) &= \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & 0 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} - x_1 x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} - x_1 x_n^{n-2} \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1 x_2 & \cdots & x_2^{n-1} - x_1 x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n - x_1 & x_n^2 - x_1 x_n & \cdots & x_n^{n-1} - x_1 x_n^{n-2} \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & (x_2 - x_1) x_2 & \cdots & (x_2 - x_1) x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n - x_1 & (x_n - x_1) x_n & \cdots & (x_n - x_1) x_n^{n-2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Entwickelt man diese Determinante nach der ersten Zeile und verwendet die Linearität der Determinante in jeder Zeile, dann ergibt sich

$$\begin{aligned} V_n(x_1, \dots, x_n) &= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & (x_2 - x_1) x_2 & \cdots & (x_2 - x_1) x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n - x_1 & (x_n - x_1) x_n & \cdots & (x_n - x_1) x_n^{n-2} \end{pmatrix} \\ &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdot \ldots \cdot (x_n - x_1) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-2} \end{pmatrix} \\ &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdot \ldots \cdot (x_n - x_1) \cdot V_{n-1}(x_2, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Vermutung

$$V_n(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j).$$

Diese Vermutung wird nun unter Verwendung der letzten Gleichung mittels Induktion bewiesen.

- Induktionsanfang: Für $n = 2$ gilt

$$V_2(x_1, x_2) = \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{pmatrix} = x_2 - x_1 = \prod_{1 \le j < i \le 2} (x_i - x_j) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

  D. h. die Behauptung ist für $n = 2$ gezeigt.

- Induktionsvoraussetzung: Es gelte
$$V_n(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{1\le j<i\le n}(x_i - x_j)$$
für alle $x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R}$.
- Induktionsbehauptung: Es gilt
$$V_{n+1}(x_1,\ldots,x_{n+1}) = \prod_{1\le j<i\le n+1}(x_i - x_j)$$
für alle $x_1,\ldots,x_{n+1} \in \mathbb{R}$.
- Induktionsschritt: Aus der obigen Gleichung folgt
$$\begin{aligned} V_{n+1}(x_1,\ldots,x_{n+1}) &= (x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdot\ldots\cdot(x_{n+1}-x_1)\cdot V_n(x_2,\ldots,x_{n+1}) \\ &\overset{\text{IVor}}{=} (x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdot\ldots\cdot(x_{n+1}-x_1)\cdot \prod_{2\le j<i\le n+1}(x_i-x_j) \\ &= \prod_{1\le j<i\le n+1}(x_i-x_j)\,. \end{aligned}$$

Es gilt also
$$V_n(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{1\le j<i\le n}(x_i - x_j) \quad \forall n\in\mathbb{N}, n>1, x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{R}\,.$$

Aufgabe G4

Betrachten Sie den Vektorraum $V = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ der Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

(a) Sind die folgenden Funktionen f_1, f_2 in V linear unabhängig?
$$f_1(x) := e^x,\quad f_2(x) := x \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

(b) Sind die folgenden Funktionen f_1, f_2, f_3 in V linear unabhängig?
$$f_1(x) := \sin^2 x,\quad f_2(x) := \cos^2 x,\quad f_3(x) = 1 \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

(c) Sind die folgenden Funktionen f_1, f_2, f_3 in V linear unabhängig?
$$f_1(x) := 1,\quad f_2(x) := x,\quad f_3(x) = x^2 \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

Zeigen Sie jeweils ihre Behauptungen.

Lösung:

(a) Aus $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0$ mit $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ folgt für alle $x\in\mathbb{R}$ die Gleichung $\lambda_1 e^x + \lambda_2 x = 0$. Setzt man hier für x die speziellen Werte 0 und 1 ein, so ergibt sich das Gleichungssystem
$$\begin{aligned} \lambda_1\cdot 1 + \lambda_2\cdot 0 &= 0 \\ \lambda_1\cdot e + \lambda_2\cdot 1 &= 0\,. \end{aligned}$$
Aus der ersten Gleichung ergibt sich $\lambda_1 = 0$. Durch Einsetzen in die zweite Gleichung erhält man auch $\lambda_2 = 0$. Also sind f_1 und f_2 linear unabhängig.

(b) Für alle $x\in\mathbb{R}$ gilt bekanntlich $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Es ist also
$$f_1 + f_2 - f_3 = 0\,.$$
D. h. f_1, f_2 und f_3 sind linear abhängig.

(c) Aus $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$ mit $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$ folgt für alle $x\in\mathbb{R}$ die Gleichung $\lambda_1\cdot 1 + \lambda_2\cdot x + \lambda_3\cdot x^2 = 0$. Setzt man hier für x die speziellen Werte $0, 1$ und -1 ein, so ergibt sich das folgende Gleichungssystem.
$$\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & & & & & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & & & & & = & 0 \\ & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{ccccc} \lambda_1 & & & = & 0 \\ & \lambda_2 & + \lambda_3 & = & 0 \\ & & 2\lambda_3 & = & 0 \end{array}$$
$$\Longrightarrow \begin{array}{ccccc} \lambda_1 & & & = & 0 \\ & \lambda_2 & + \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{ccccc} \lambda_1 & & & = & 0 \\ & \lambda_2 & & = & 0 \\ & & \lambda_3 & = & 0 \end{array}$$
Es gilt also $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
D. h. f_1, f_2 und f_3 sind linear unabhängig.

Hausübung

Aufgabe H1 (6 Punkte)
Es sei K ein Körper und V ein endlich erzeugter K-Vektorraum. Weiter seien U und W Unterräume von V. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $U \cap W = \{0\}$ und $U + W = V$ genau dann, wenn für jede geordnete Basis $(u_1, \ldots, u_k)$ von U und jede geordnete Basis $(w_1, \ldots, w_m)$ von W das Tupel $(u_1, \ldots, u_k, w_1, \ldots, w_m)$ eine geordnete Basis von V ist.

(b) Es gilt:
$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$
Zählen Sie dazu Vektoren in geeigneten Basen.

Lösung:

(a) "$\Leftarrow$" Sei $v \in U \cap W$, etwa
$$v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i = \sum_{j=1}^{m} \mu_j w_j, \qquad \lambda_i, \mu_i \in K.$$
Hier haben wir benutzt, dass U bzw. W von $u_1, \ldots, u_k$ bzw. $w_1, \ldots, w_m$ erzeugt werden. Dann ist
$$0 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i - \sum_{j=1}^{m} \mu_j w_j,$$
und das impliziert, dass alle λ_i, $\mu_j = 0$ sind, da $(u_1, \ldots, u_k, w_1, \ldots, w_m)$ linear unabhängig ist. Also ist $v = 0$ und $U \cap W = \{0\}$.
Nun sei $v \in V$ beliebig. Da $\langle u_1, \ldots, u_k, w_1, \ldots, w_m \rangle = V$, gibt es $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \mu_1, \ldots, \mu_m \in K$, sodass
$$v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i + \sum_{j=1}^{m} \mu_j w_j,$$
also ist $v \in U + W$.
"$\Rightarrow$" Sei $(u_1, \ldots, u_k)$ Basis von U und $(w_1, \ldots, w_m)$ Basis von W. Weiter sei $v \in V$. Da $U + W = V$ ist, gibt es $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \mu_1, \ldots, \mu_m \in K$ mit
$$v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i + \sum_{j=1}^{m} \mu_j w_j.$$
Also ist $v \in \langle u_1, \ldots, u_k, w_1, \ldots, w_m \rangle$, d. h. $u_1, \ldots, u_k, w_1, \ldots, w_m$ ist ein Erzeugendensystem von V.
Sei nun $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \mu_1, \ldots, \mu_m \in K$ mit
$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i + \sum_{j=1}^{m} \mu_j w_j = 0.$$
Es gilt
$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i \in U \quad \text{und} \quad -\sum_{j=1}^{m} \mu_j w_j \in W$$
und somit liegen beide Terme in $U \cap W$. Wegen $U \cap W = \{0\}$ folgt, dass alle λ_i und μ_j sind gleich Null, da $(u_1, \ldots, u_k)$ und $(w_1, \ldots, w_m)$ linear unabhängig sind. D. h. aber, dass $(u_1, \ldots, u_k, w_1, \ldots, w_m)$ linear unabhängig ist.

(b) Wir wählen eine Basis $(x_1, \ldots, x_d)$ von $U \cap W$. Damit ergänzen wir die Teilmenge $\{u_1, \ldots, u_s\} \subset U$ zu einer Basis $(x_1, \ldots, x_d, u_1, \ldots, u_s)$ von U. Genauso bekommen wir eine Basis $(x_1, \ldots, x_d, w_1, \ldots w_t)$ von W.
Also gilt $\dim(U \cap W) = d$, $\dim U = d + s$ und $\dim W = d + t$. Wir müssen jetzt also zeigen, dass $(x_1, \ldots, x_d, u_1, \ldots, u_s, w_1, \ldots, w_t)$ eine Basis von $U + W$ ist (also $\dim(U + W) = d + s + t$).
Wir zeigen zunächst die lineare Unabhängigkeit. Seien $\rho_1, \ldots, \rho_d, \lambda_1, \ldots, \lambda_s, \mu_1, \ldots, \mu_t \in K$ mit
$$\sum_{i=1}^{d} \rho_i x_i + \sum_{j=1}^{s} \lambda_j u_j + \sum_{k=1}^{t} \mu_k w_k = 0.$$

Dies ist äquivalent dazu, dass

$$-\sum_{i=1}^{d}\rho_i x_i - \sum_{j=1}^{s}\lambda_j u_j = \sum_{k=1}^{t}\mu_k w_k \in U\cap W.$$

Also gibt es $\nu_1,\dots,\nu_d \in K$ mit

$$\sum_{m=1}^{d}\nu_m x_m = \sum_{k=1}^{t}\mu_k w_k.$$

Da $(x_1,\dots,x_d,w_1,\dots,w_t)$ linear unabhängig ist, folgt, dass alle ν_m und μ_k gleich Null sind.
Dann ist aber auch

$$\sum_{i=1}^{d}\rho_i x_i + \sum_{j=1}^{s}\lambda_j u_j + \sum_{k=1}^{t}\mu_k w_k = \sum_{i=1}^{d}\rho_i x_i + \sum_{j=1}^{s}\lambda_j u_j = 0$$

und aus der linearen Unabhängigkeit von $(x_1,\dots,x_d,u_1,\dots,u_s)$ folgt, dass alle ρ_i und λ_j gleich Null sind.
Wir müssen also nur noch zeigen, dass $(x_1,\dots,x_d,u_1,\dots,u_s,w_1,\dots,w_t)$ ein Erzeugendensystem von $U+W$ ist, d. h. $\langle x_1,\dots,x_d,u_1,\dots,u_s,w_1,\dots,w_t\rangle = U+W$.
"$\supseteq$" Seien $u\in U$, $w\in W$. Dann ist

$$u = \sum_{i=1}^{d}\rho_i x_i + \sum_{j=1}^{s}\lambda_j u_j$$

und

$$w = \sum_{i=1}^{d}\sigma_i x_i + \sum_{k=1}^{s}\mu_k u_k$$

mit $\rho_1,\dots,\rho_d,\sigma_1,\dots,\sigma_d,\lambda_1,\dots,\lambda_s,\mu_1,\dots,\mu_t \in K$. Also ist

$$u+w = \sum_{i=1}^{d}(\rho_i+\sigma_i)x_i + \sum_{j=1}^{s}\lambda_j u_j + \sum_{k=1}^{s}\mu_k u_k.$$

"$\subseteq$" klar

Aufgabe H2 (6 Punkte)
Man betrachte $V := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \mid a_{n+2} = a_{n+1} + a_n\}$

(a) Zeigen Sie, dass V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist und bestimmen Sie $\dim V$.
(b) Man bestimme $q_1 \neq q_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ derart, dass $(q_1^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(q_2^n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in V$ gilt.
(c) Zeigen Sie, dass $B = \{(q_1^n),\ (q_2^n)\}$ eine Basis von V ist.
(d) Man bestimme die Koordinaten der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in V$ mit $b_0 = 0, b_1 = 1$ bzgl. B und insbesondere eine Formel für b_n.

Lösung:

(a) V ist ein $\mathbb{R}$-VR (klar). Folge $(a_n) \in V$ liegt fest durch die Angabe von a_0 und a_1, d. h. $\varphi : V \to \mathbb{R}^2$ mit $\varphi(a_n) := \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$ ist ein Isomorphismus und somit $\dim V = \dim \mathbb{R}^2 = 2$

(b) $(q^n) \in V \iff q^{n+2} = q^{n+1} + q^n\ \forall n \overset{q\neq 0}{\iff} q^2 = q+1 \Rightarrow q_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+1} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 \\ q_1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig. $\Rightarrow$ eine Basis

(d) Nun wissen wir, dass $b_n = a\cdot(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + b\cdot(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$ gilt.
Für $n=0$ erhalten wir daraus: $0 = a\cdot(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^0 + b\cdot(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^0 = a+b$
Für $n=1$ erhalten wir daraus: $1 = a\cdot(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^1 + b\cdot(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^1$
Dies ist ein LGS. Die Lösung davon lautet: $a = \frac{1}{\sqrt{5}},\ b = -\frac{1}{\sqrt{5}}$
Somit ist $b_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n = \frac{(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n}{\sqrt{5}\cdot 2^n}$

Aufgabe H3 (6 Punkte)

(a) Sei $V = \mathbb{K}^{n\times n}$ der $\mathbb{K}$-Vektorraum der $n \times n$-Matrizen über dem Körper $\mathbb{K}$. Bestimmen Sie die Dimension von V und geben Sie eine Basis von V an.

(b) Sei $H_n = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} \mid A^* = A\}$. Zeigen Sie, dass H_n ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, aber kein $\mathbb{C}$-Vektorraum ist. (Um zu zeigen, dass H_n ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist, genügt es zu zeigen, dass H_n ein Unterraum des $\mathbb{R}$-Vektorraums $C^{n\times n}$ ist.)

(c) Bestimmen Sie die Dimension von H_2 und geben Sie eine Basis von H_2 an.

Lösung:

(a) Es gilt $\dim V = n^2$. Für $1 \le i, j \le n$ sei $E_{ij} = (\delta_i \delta_j)_{ij}$ die Matrix mit 1 an der Position ij und 0 sonst. Die *Elementarmatrizen* $E_{ij}, 1 \le i, j \le n$ bilden eine Basis von V.

(b) Um zu zeigen, dass H_n ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist, rechnet man die Untervektorraumaxiome nach.
H_n ist kein $\mathbb{C}$-Vektorraum, da $E_n \in H_n$ ist, aber wegen $(iE_n)^* = -iE_n$ ist $iE_n \notin H_n$.

(c) Es gilt $\dim H_2 = 4$. Die folgenden Matrizen bilden eine Basis:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad b_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$